

جبر

برای سال پنجم ریاضی

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش



بها در تمام کشور ۳۰ ریال

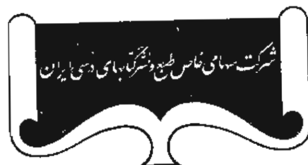
توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

جبر

برای سال پنجم ریاضی

چاپ و توزیع از :



۱۳۵۴

این کتاب که به وسیلهٔ آقایان : ابوالقاسم قربانی ، حسن صفاری نگارش یافته ، بر طبق مادهٔ ۳ قانون کتابهای درسی و اساسنامهٔ س[illegible] کتابهای درسی ایران برای تدریس در دبیرستانها برگزیده شده است .

چاپ از : مطبوعات

فهرست مندرجات

عنوان — صفحه

به نام خدا

فصل اول

الف ـ تکرار حل معادلهٔ یك مجهولی درجه دوم

۱ ـ هرمعادله که پس از ساده کردن و نقل وتحویل جملهها به یك طرف (با رعایت آنکه معادلات حاصل دو بدو متعادل باشند) به صورت کلی $ax^2+bx+c=0$ درآید، معادلهٔدرجهٔ دوم نامیده میشود. a ، b و c ضرایب معلوم جبری هستند و وقتی معادله از درجهٔ دوم است که $a\neq 0$ باشد . ولی b یا c یا هردوآنها میتوانند مساوی با صفرباشند، دراینصورت، معادلهٔ درجهٔ دوم را **معادلهٔ ناقص** میگویند.

بنابراین، برحسب اینکه b یا c یا هر دوآنها مساوی صفر باشد، سه نوع معادلهٔ ناقص درجهٔ دوم حاصل میشود :

$$ax^2+c=0 \qquad ax^2+bx=0 \qquad ax^2=0$$

۲ ـ حل معادلات ناقص درجهٔ دوم :

I ـ حل معادلهٔ $ax^2=0$ ـ چون $a\neq 0$ است ، ناچار باید $x^2=0$ یا $x\times x=0$ باشد و درهرحال $x=0$ است ؛ پس این معادله دو ریشه داردکه هردوآنها صفر میباشند .

II ـ حل معادلهٔ $ax^2+bx=0$ ـ چون x را فاکتور قرار دهیم ، نتیجه میشود:

$$x(ax+b)=0$$

عنوان | صفحه

به نام خدا

فصل اول

الف ـ تکرار حل معادلهٔ یك مجهولی درجه دوم

۱ ـ هر معادله که پس از ساده کردن و نقل وتحویل جمله‌ها به یك طرف (با رعایت آنکه معادلات حاصل دو بدو متعادل باشند) به صورت‌کلی $ax^2+bx+c=0$ درآید، معادلهٔ‌درجهٔ دوم‌نامیده می‌شود.

a ، b و c ضرایب معلوم جبری هستند و وقتی معادله از درجهٔ دوم است‌که $a\neq 0$ باشد . ولی b یا c یا هردوآنها می‌توانند مساوی با صفرباشند، دراین‌صورت، معادلهٔ درجهٔ دوم را **معادلهٔ ناقص** می‌گویند.

بنابراین، برحسب اینکه b یا c یا هر دوآنها مساوی صفر باشد، سه نوع معادلهٔ ناقص درجهٔ دوم حاصل می‌شود :

$$ax^2=0 \qquad ax^2+bx=0 \qquad ax^2+c=0$$

۲ ـ حل معادلات ناقص درجهٔ دوم :

I ـ حل معادلهٔ $ax^2=0$ ـ چون $a\neq 0$ است ، ناچار باید $x^2=0$ یا $x\times x=0$ باشد و درهرحال $x=0$ است ؛ پس این معادله دو ریشه داردکه هردوآنها صفر می‌باشند .

II ـ حل معادلهٔ $ax^2+bx=0$ ـ چون x را فاکتور قرار دهیم ، نتیجه می‌شود:

$$x(ax+b)=0$$

بنابراین، یا $x=0$ یا $ax+b=0$، یعنی $x=-\frac{b}{a}$. این نوع معادلات، همواره دارای دو ریشهٔ متمایز هستند:

$$x'=0 \quad \text{و} \quad x''=-\frac{b}{a}$$

مثال ـ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-7x=0$ دارای دو ریشهٔ:

$$x'=0 \quad \text{و} \quad x''=+\frac{7}{2}$$

ومعادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+3x=0$ دارای دو ریشه به‌صورت زیر است:

$$x'=0 \quad \text{و} \quad x''=-\frac{3}{2}$$

III ـ حل معادلهٔ ناقص $ax^2+c=0$ ـ این معادله را می‌توان چنین نوشت: $ax^2=-c$ یا $x^2=-\frac{c}{a}$

برای بدست آوردن x، باید از طرفین این رابطه جذر بگیریم واین درصورتی ممکن است که مقدار $-\frac{c}{a}$ مثبت یا $\frac{c}{a}$ منفی باشد، یعنی دوضریب c و a دارای علامتهای مختلف باشند؛ پس اگر $\frac{c}{a}>0$ باشد، معادلهٔ مفروض دارای ریشه نیست و اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، معادله دارای دوریشهٔ $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ است که متساوی و مختلف‌العلامه می‌باشند (قرینهٔ یکدیگرند).

گاهی به جای اینکه بگویند معادله ریشه ندارد، می‌گویند ریشه‌های معادله موهومی هستند و این هر دو عبارت، یك معنی دارد.

مثال ـ در معادلهٔ $9x^2+7=0$ چون دو ضریب c و a یك علامت دارند، معادله ریشه ندارد.

در معادلهٔ $x^2-8=0$ دو ضریب a و c مختلف‌العلامه هستند، پس معادله دارای دو ریشه است:

$$x^2=8 \text{ ، } x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$$

یا $x'=2\sqrt{2}$ و $x''=-2\sqrt{2}$

۳ ـ حل معادلهٔ درجهٔ دوم کامل $ax^2+bx+c=0$ (۱) ـ

چون به فرض $a\neq0$ است، طرفین معادله را می‌توان بر a تقسیم کرده چنین نوشت:

$$(۲) \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

حال ملاحظه می‌کنیم که $x^2+\frac{b}{a}x$، عبارت است از دو جملهٔ اول از مجذور $x+\frac{b}{2a}$؛ زیرا، $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

لذا، معادلهٔ ۲ را می‌توان چنین نوشت:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

یا

$$(۳) \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

حال برحسب آنکه مقدار b^2-4ac منفی یاصفر یا مثبت باشد، سه حالت تمیز می‌دهیم:

حالت اول ـ $b^2-4ac<0$

در این حالت، $4ac-b^2>0$ است و معادلهٔ ۳ را می‌توان چنین نوشت :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 \qquad (۴)$$

چون هر يك از دو عبارت $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ و $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ مثبت است، طرف اول معادلهٔ ۴ ، مجموع دو مقدار مثبت می‌باشد و به ازای هیچ مقدار از x صفر نمی‌شود . دراین حالت می‌گویندکه معادله دارای ریشه نیست یا دو ریشهٔ آن، موهومی هستند .

حالت دوم ـ $b^2-4ac=0$

دراین حالت ، معادلهٔ ۳ چنین نوشته می‌شود :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0 \quad \text{یا} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

و معادلهٔ مفروض ، با دو معادلهٔ : $x+\frac{b}{2a}=0$ و $x+\frac{b}{2a}=0$

که جواب هردوآنها $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد، معادل است .

در حقیقت این بار ، با اینکه طرفین معادله فقط به ازای يك مقدار از x متساوی می‌شوند ، ممکن است بگوییم که دو جواب معادله با یکدیگر مساوی هستند وبه همین علت، ریشهٔ معادله را دراین حالت **ریشهٔ مضاعف** می‌نامند .

پس اگر $b^2-4ac=0$ باشد ، طرف اول معادله به يك مجذور کامل تبدیل می‌شود و معادله يك ریشهٔ مضاعف دارد .

حالت سوم ـ $b^2-4ac>0$

دراین حالت، عبارت $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ رامی‌توان مجذور $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ دانست و معادلهٔ ۳ را به صورت زیر نوشت :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$

طرف اول این معادله ، تفاضل دو مجذور کامل است و می‌توان آن را به صورت زیر تجزیه کرد :

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

و برای آنکه حاصل ضرب این دو عامل مساوی صفر شود، لازم و کافی است‌که یکی ازاین دوعامل مساوی صفر باشد، یعنی معادلهٔ مفروض با دو معادلهٔ درجهٔ اول زیر معادل باشد :

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

که ریشهٔ آنها عبارتند از :

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(ریشهٔ اولی)}$$

و

$$x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(ریشهٔ دومی)}$$

پس معادلهٔ مفروض ، بطور کلی دارای دو ریشهٔ x' و x'' است که بطور خلاصه می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

و برای یافتن دو ریشه، کافی است متوالیاً علامتهای + و − را اختیارکنیم .

۴ ـ خلاصه ـ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ، بستگی به علامت عبارت $\Delta=b^2-4ac$ داردکه به **مبین** معادله موسوم است .

$$\Delta=b^2-4ac$$

$\Delta<0$ معادله ریشه ندارد .

$\Delta=0$ معادله یك ریشهٔ مضاعف $x=\frac{-b}{2a}$ دارد .

$\Delta>0$ معادله دو ریشهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ دارد .

۵ ـ تبصره ـ اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، معادله حتماً دو ریشهٔ متمایز دارد؛ زیرا دراین صورت $ac<0$ و درنتیجه $-4ac>0$ است وچون $b^2\geq 0$ ، واضح می‌شودکه $b^2-4ac>0$.

۶ ـ ساده‌کردن دستورها ـ اگر ضریب b زوج باشد ، یعنی شامل عامل ۲ باشد ، می توان فرض کرد $b=2b'$ (نصف b را

b' نامیده‌ایم) ؛ خواهیم داشت :

$$b^2-4ac=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$$

پس

$$\sqrt{b^2-4ac}=2\sqrt{b'^2-ac}$$

و دستورهای حل معادله چنین می‌شوند :

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

عبارت $\Delta'=b'^2-ac$ همان علامت Δ را دارد ، زیرا $\Delta=4\Delta'$ ، وآن را باختصار Δ' یا **مبین خلاصه شده** می‌نامند .

۷ـ چند مثال ازحل معادلات درجهٔ دوم :

مثال ۱ ـ حل معادلهٔ $5x^2+11x-12=0$.

دراین معادله $c=-12$ و $b=11$ و $a=5$ است .

پس : $\Delta=(11)^2-4\times5(-12)=361$

بنابراین : $x=\frac{-11\pm\sqrt{361}}{10}=\frac{-11\pm19}{10}$

وازآنجا : $x'=\frac{4}{5}$ و $x''=-3$

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ $4x^2-20x+25=0$ (با دستور b').

$$\Delta'=(-10)^2-4\times25=0$$

پس این معادله دارای ریشهٔ مضاعف است : $x'=x''=\frac{5}{2}$.

وعلت، این است‌که طرف‌اول معادله، مجذورعبارت $(2x-5)$ می‌باشد.

مثال ۳ ـ حل معادلهٔ $x^2-3x+5=0$.

$$\Delta=(-۳)^۲-۴\times۱\times۵=-۱۱$$

چون مبین معادله منفی است، معادله ریشه ندارد .

مثال ۴ـ معادلهٔ حرفی زیر را حل کنید :

$$۲x^۲-(a-۲b)x-ab=۰$$

حل :
$$x=\frac{a-۲b\pm\sqrt{(a-۲b)^۲+۸ab}}{۴}$$

یا :
$$x=\frac{a-۲b\pm\sqrt{a^۲+۴b^۲-۴ab+۸ab}}{۴}$$

یا :
$$x=\frac{a-۲b\pm\sqrt{(a+۲b)^۲}}{۴}$$

و بالاخره :
$$x=\frac{a-۲b\pm(a+۲b)}{۴}$$

یعنی :
$$x'=\frac{a}{۲} \quad و \quad x''=-b$$

مثال ۵ـ حل معادلهٔ کسری $\frac{۸}{x+۶}+\frac{۱۲-x}{x-۶}=۱$.

تمام جمله‌ها را به یك طرف نقل کرده مخرج مشترك می‌گیریم ؛ معادله مرتباً به صورتهای زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{۸}{x+۶}+\frac{۱۲-x}{x-۶}-۱=۰$$

$$\frac{۸(x-۶)+(۱۲-x)(x+۶)-(x^۲-۳۶)}{x^۲-۳۶}=۰$$

$$\frac{-۲x^۲+۱۴x+۶۰}{x^۲-۳۶}=۰$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از ریشه‌های صورت کسر طرف چپ به‌شرط آنکه این مقادیر، مخرج کسر را صفر نکنند. اما دوریشهٔ معادلهٔ $-۲x^۲+۱۴x+۶۰=۰$ عبارتند از ۱۰ و -۳ که مخرج را صفر نمی‌کنند؛ پس معادله دارای دو ریشهٔ زیر می‌باشد :

$$x'=۱۰ \qquad و \qquad x''=-۳$$

۸ـ مسئله ـ به ازای چه مقداری از m عدد $+۳$ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲-(m+۱)x+۲m=۰$ می‌باشد .

چون باید $+۳$ ریشهٔ معادله باشد ، اگر در معادله به جای x عدد $+۳$ را بگذاریم، باید رابطهٔ حاصل برقرار باشد؛ یعنی باید داشته باشیم :

$$۳^۲-۳(m+۱)+۲m=۰ \qquad یا \qquad ۶-m=۰$$

واین، یك معادله برحسب m است که ریشه‌اش $m=۶$ می‌باشد؛

پس $m=۶$ جواب مسئله است .

تمرین و مسئله

معادلات زیر را حل کنید :

۱ـ $۲x^۲-۳x=۰$

۲ـ $-۴x^۲+۵x=۰$

۳ـ $x^۲+۴x=۰$

۴ـ $x^۲-۴=۰$

۵ـ $۳x^۲-۵=۰$

۶ـ $۴x^۲+۷=۰$

۷ـ $x^۲-۳x+۲=۰$

۸ـ $x^۲-۲x-۳=۰$

۹ـ $x^۲+۹x+۱۸=۰$

۱۰ـ $-۲x^۲+۷x-۳=۰$

۱۱ـ $۵x^۲+۶x-۸=۰$

۱۲ـ $۶x^۲-۷x-۲۰=۰$

۱۳ـ $x^۲+۲x-۱=۰$

۱۴ـ $۴x^۲-۹x+۳=۰$

۱۵ـ $x^2-4x+4=0$

۱۶ـ $9x^2+6x+1=0$

۱۷ـ $2x^2-3.1x+0.42=0$

۱۸ـ $6x^2+8.6x+1.955=0$

۱۹ـ $\frac{1}{x}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x+3}$

۲۰ـ $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-1}=\frac{8}{3}$

۲۱ـ $\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-5}+2=0$

۲۲ـ $\frac{1}{x-8}+\frac{8}{x-3}=\frac{12}{x+5}$

۲۳ـ $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1}$

۲۴ـ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}=\frac{7}{10}$

۲۵ـ $\frac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2}=7$

۲۶ـ $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}$

۲۷ـ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x}$

۲۸ـ $x^2-2(a+1)x+4a=0$

۲۹ـ $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}$

۳۰ـ $x^2-4abx-(a^2-b^2)^2=0$

۳۱ـ $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0$

۳۲ـ $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}+2=0$

۳۳ـ $\frac{x-a}{x-b}-\frac{x-b}{x-a}+\frac{4ab}{a^2-b^2}=0$

۳۴ـ $(a-b)^2x^2-2(a^2+b^2)x+(a+b)^2=0$

۳۵ـ $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{(a+b)^2}{ab}$

۳۶ـ $a(a+1)x^2+x-a(a-1)=0$

۳۷ـ $a(a+2)x^2+2x-a^2+1=0$

۳۸ـ در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+mx+3=0$ ، یکی از دو ریشه مساوی ۳ می‌باشد؛ مطلوب است تعیین m و ریشهٔ دیگر .

۳۹ـ در معادلهٔ $x^2-(m+1)x+1=0$ ، مقدار m را چنان تعیین کنید که دو ریشهٔ معادله متساوی باشند .

۴۰ـ در معادلهٔ درجهٔ دوم $mx^2+3x-m=0$ ، مقدار m را چنان تعیین کنیدکه مبین معادله مساوی ۲۵ باشد .

۴۱ـ مطلوب است حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ بنابرآنکه می‌دانیم $a+b+c=0$ است .

۴۲ـ مطلوب است حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ بنابرآنکه می‌دانیم $4a-2b+c=0$ است .

۴۳ـ مطلوب است حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ بنابرآنکه می‌دانیم $9a+3b+c=0$ است .

ب ـ روابط بین ضریبها و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۹ ـ قضیه ـ ۱ـ اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$

دو ریشهٔ متمایز یا متساوی داشته باشد ، مجموع این ریشه‌ها $\frac{-b}{a}$ و

حاصل ضرب آنها $\frac{c}{a}$ است .

چنانکه می‌دانیم، ریشه‌های معادله درحالتی که وجود داشته باشند،

از دستور $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

بدست می‌آیند؛ پس :

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

پس

$$\boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}} \quad (1)$$

و

$$x'x''=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}=$$

$$\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

پس :

$$\boxed{x'x''=\frac{c}{a}} \quad (2)$$

این محاسبات ، درحالت $b^2-4ac=0$ نیز صحت دارند .

روابط ۱ و ۲ را غالباً **روابط بین ضریبها وریشه‌های** معادله

می‌گویند .

مثال ـ درمعادلهٔ $x^2-7x+3=0$ ، مجموع دوریشه ۷وحاصل‌ضرب آنها ۳ می‌باشد و در معادلهٔ درجهٔ دوم $25x^2+20x+1=0$ ، مجموع دو ریشه $-\frac{4}{5}$ وحاصل‌ضرب آنها $\frac{1}{25}$ است .

موارد استعمال روابط بین ضریبها و ریشه‌ها

۱۰ ـ علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم ـ مقصود این است که بدون حل‌معادله، تعیین کنیم که ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم دارای چه علامتی می‌باشند . واضح است‌که این بحث ، وقتی مورد دارد که معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشه باشد .

برای این‌کار، سه حالت تمیز می‌دهیم :

حالت اول $\frac{c}{a}<0$: دراین صورت، a و c مختلف‌العلامه هستند ومعادله دو ریشه داردکه علامت آنها مختلف است .

حالت دوم $c=0$: یك ریشهٔ معادله صفر است و ریشهٔ دیگر مساوی مجموع ریشه‌ها، یعنی $-\frac{b}{a}$ ، است‌که علامت‌آن معلوم می‌باشد.

حالت سوم $\frac{c}{a}>0$: ریشه‌ها در صورتی وجود دارند که $\Delta\geq0$ باشد و دراین صورت، دو ریشه متحدالعلامه هستند وعلامت مشترك آنها علامت $-\frac{b}{a}$ است .

خلاصهٔ مطالب فوق، درجدول صفحهٔ بعد مندرج است :

$$ax^2+bx+c=0$$

اولا $\frac{c}{a}<0$ ..... $x'<0<x''$

ثانیاً $c=0$ ..... $x'=-\frac{b}{a}$ و $x''=0$

ثالثاً $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta\geq 0$ $\begin{cases} -\frac{b}{a}>0 & 0<x'\leq x'' \\ -\frac{b}{a}<0 & x'\leq x''<0 \end{cases}$

مثال – اولاً درمعادلهٔ $x^2-5x-4=0$

$$-\frac{b}{a}=5 \quad \text{و} \quad \frac{c}{a}=-4$$

پس دو ریشهٔ مختلف‌العلامه وجود دارد و قدر مطلق ریشهٔ مثبت بیشتر است .

ثانیاً درمعادلهٔ $3x^2-10x+3=0$

$$-\frac{b}{a}=\frac{10}{3} \quad \text{و} \quad \frac{c}{a}=1>0$$

چون $\Delta'=16>0$ است، دو ریشهٔ مثبت وجود دارد .

ثالثاً درمعادلهٔ $2x^2+3x+5=0$ چون $\Delta<0$ است ، بحث از علامت ریشه‌ها اصلا مورد ندارد .

رابعاً درمعادلهٔ $4x^2-20x+25=0$ چون $\Delta'=0$ است، ریشهٔ مضاعف ومثبت ۲/۵ وجود دارد .

حل مسائل مربوط به ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۱۱– مسئلهٔ۱ – دو عدد چنان معین کنید که مجموع آنها مساوی

با عدد مفروض S وحاصل‌ضرب آنها مساوی با عدد معلوم P باشد .

حل – اگر دو عدد مطلوب را x' و x'' بنامیم ، روابط زیر برقرار است :

$$x'+x''=S \quad \text{و} \quad x'x''=P$$

یعنی آن دوعدد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دومی مانند $ax^2+bx+c=0$ هستندکه برای آن ، $-\frac{b}{a}=S$ و $\frac{c}{a}=P$.

یا : $b=-aS$ و $c=aP$ است .

ومعادلهٔ درجهٔ دوم مفروض ، چنین نوشته می‌شود :

$$ax^2-aSx+aP=0$$

یا $a(x^2-Sx+P)=0$

وچون $a\neq 0$ است ،

پس $x^2-Sx+P=0$

از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم ، دو عدد مطلوب x' و x'' بدست می‌آید .

مسئله وقتی امکان دارد که مبین این معادله مثبت یاصفر باشد ؛ یعنی داشته باشیم : $S^2-4P\geq 0$.

مثال ۱ – مجموع دوعدد، ۱۷ وحاصل‌ضرب آنها، ۶۰ است؛آن دو عدد کدامند ؟

آن دو عدد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-17x+60=0$ هستند و از حل معادله نتیجه می‌شود $x'=5$ و $x''=12$.

مثال ۲ – مجموع دوعدد، ۷ وحاصل ضرب آنها ، ۱۴ است؛آن

دو عدد را معین کنید .

دوعدد مطلوب، باید ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 7x + 14 = 0$ باشند وچون مبین این معادله منفی است ، پس چنین دوعددی وجود ندارد.

۱۲- مسئلهٔ ۲- معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که دو ریشهٔ آن ، اعداد مفروض a و b باشند .

حل - این مسئله از روی مسئلهٔ قبل حل می‌شود ؛ زیرا مجموع دو ریشهٔ معادله، $S=a+b$ وحاصل ضرب آنها ، $P=ab$ معلوم است؛ پس معادلهٔ مطلوب، عبارت است از : $x^2-(a+b)x+ab=0$.

مثال - معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیدکه ریشه‌های آن، -7 و $+3$ باشند .

چون $S=-4$ و $P=-21$ است ، معادلهٔ درجهٔ دوم مطلوب عبارت است از :

$$x^2+4x-21=0$$

۱۳ - مسئلهٔ ۳ - معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که هر ریشهٔ آن ، m برابر ریشه‌ای از معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشد .

حل - ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را z' و z'' می‌نامیم؛ بنابه فرض:

$$z'+z''=mx'+mx''=m(x'+x'')=-\frac{mb}{a}$$

$$z'z''=mx'\times mx''=m^2x'x''=\frac{m^2c}{a}$$

و بنا بر مسئلهٔ قبل ، معادلهٔ مطلوب عبارت است از :

$$z^2+\frac{mb}{a}z+m^2\frac{c}{a}=0$$

$$az^2+mbz+m^2c=0$$

۱۴ - مسئلهٔ ۴ - معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که دو ریشهٔ آن ، عکس ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشد .

حل - اگر دو ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را z' و z'' فرض کنیم، داریم:

$$z'+z''=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

و

$$z'z''=\frac{1}{x'}\times\frac{1}{x''}=\frac{1}{x'x''}=\frac{a}{c}$$

پس معادلهٔ مطلوب ، عبارت است از :

$$z^2+\frac{b}{c}z+\frac{a}{c}=0$$

یا

$$cz^2+bz+a=0$$

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلات درجهٔ دوم پارامتری

۱۵ - پارامتر عبارت است از مقدار معلوم و متغیری که ممکن است ضرایب جمله‌های معادله به آن بستگی داشته باشند و می‌توان آن را طوری اختیار کرد که معادله دارای جواب معینی باشد یا در شرایط مخصوصی صدق کند . از اینجا معلوم می‌شود که هر معادلهٔ پارامتری در حقیقت بی‌نهایت معادله است که به ازای مقادیر مختلفی که ممکن است

به پارامتر نسبت داد ، بوجود می‌آیند .

۱۶ ـ برای تعیین علامت ریشه‌های یك معادلهٔ پارامتری ، مبین معادله و حاصل ضرب و مجموع ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم و علامت هریك از آنها را مشخص می‌کنیم و بین هر دو مقدار مهم[1] که به پارامتر نسبت داده شود، علامت مبین (Δ) وعلامت حاصل ضرب دو ریشه (P) و علامت مجموع دو ریشه (S) را تحقیق وعلامت ریشه‌ها را مثل معادلات با ضرایب عددی معین می‌کنیم .

۱۷ ـ مثال ۱ـ مطلوب است بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر برحسب مقادیر مختلف m :

$$f(x)=(m-3)x^2-2mx+m+2=0$$

حل ـ مبین معادله و مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم وعلامت آنها را معین می‌کنیم .

$$\Delta'=m^2-(m-3)(m+2)=m+6$$

مبین، به ازای $m<-6$ منفی وبه ازای $m>-6$ مثبت‌است.

حاصل ضرب ریشه‌ها عبارت است از: $\dfrac{c}{a}=\dfrac{m+2}{m-3}$

علامت $\dfrac{c}{a}$ همان علامت $(m+2)(m-3)$ است و علامت این عبارت ، به ازای $-2<m<3$ منفی وبه ازای $m>3$ یا $m<-2$ مثبت است .

۱ـ مقادیر مهم پارامتر، مقادیری هستندکه مبین معادله یا حاصلضرب دو ریشه یا مجموع دو ریشه به ازای آنها تغییر علامت می‌دهند .

مجموع ریشه‌ها عبارت است از : $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2m}{m-3}$

که علامت‌آن، همان علامت $m(m-3)$ می‌باشد وعلامت این عبارت ، به ازای $0<m<3$ منفی وبه‌ازای $m>3$ یا $m<0$ مثبت است .

مقادیر مهم m عبارتند از ۶− ، ۲− ، ۰ و ۳ وبنابراین، بحث زیر نتیجه می‌شود :

الف ـ $m<-6$ ؛ در این حالت ، معادله ریشه ندارد .

ب ـ $m=-6$ ؛ در این حالت ، مبین صفر و معادله دارای یك ریشهٔ مضاعف است که مقدارآن، مساوی است با $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m}{m-3}$ که به ازای $m=-6$ مقدارعددی‌آن، $\dfrac{2}{3}$ است؛ پس معادله یك ریشهٔ مضاعف مثبت دارد .

ج ـ $-6<m<-2$ ؛ دراین حالت، مبین مثبت و $\dfrac{c}{a}$ مثبت و $-\dfrac{b}{a}$ مثبت است ؛ پس معادله دارای دو ریشهٔ مثبت است .

د ـ $m=-2$ ؛ در این حالت ، حاصل ضرب دو ریشه صفر می‌باشد و معادله تبدیل می‌شود به معادلهٔ عددی $-5x^2+4x=0$ که یك ریشهٔ‌آن، صفر ویك ریشهٔ آن، $\dfrac{4}{5}$ است .

هـ ـ $-2<m<0$ ؛ دراین حالت، مبین‌مثبت و $\dfrac{c}{a}$ منفی‌و $-\dfrac{b}{a}$ مثبت است ؛ پس معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد و قدرمطلق ریشهٔ

مثبت بیشتراست.

و ـ $m=0$ ؛ دراین حالت، مجموع دو ریشه صفرمی‌باشد ومعادله تبدیل می‌شود به معادلهٔ عددی $-3x^2+2=0$ که دارای دو ریشهٔ قرینهٔ $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ است.

ز ـ $0<m<3$ ؛ در این حالت، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ منفی و $-\frac{b}{a}$ نیز منفی است و معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است و قدر مطلق ریشهٔ منفی بیشتراست.

ح ـ $m=3$ ؛ دراین حالت، معادله‌تبدیل می‌شود به معادلهٔ‌درجهٔ اول $-6x+5=0$ که فقط یك ریشهٔ $x=\frac{5}{6}$ دارد.

ط ـ $m>3$ ؛ دراین حالت، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ مثبت و $-\frac{b}{a}$ هم مثبت است و معادله دارای دو ریشهٔ مثبت می‌باشد.

۱۸ ـ تبصره ـ برای‌سهولت‌درك مطلب، بهتراست جدولی تشکیل دهیم ومقادیرمهم پارامتر رابترتیب از $-\infty$ تا $+\infty$ (ازچپ به راست) درآن بنویسیم ودرفاصلهٔ بین‌هردومقدارمهم متوالی، علامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ رامشخص کرده علامت ریشه‌ها را از روی جدول درهرفاصله معین کنیم.

۱۹ـمثال۲ـ مطلوب است بحث در وجود و علامت ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$(m+1)x^2-8x+m+1=0$$

حل ـ مبین معادله و مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را تشکیل

می‌دهیم :

$$\Delta'=16-(m+1)^2=-m^2-2m+15$$

که به‌ازای $m=-5$ و $m=3$ صفرمی‌شود و به‌ازای مقادیر m محصور مابین ۳ و ۵− مثبت و در غیراین موارد منفی است.

$P=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{m+1}=1$ همواره مثبت است.

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{8}{m+1}$$

که علامت آن، همان علامت عبارت $m+1$ می‌باشد واین عبارت، به ازای $m=-1$ صفر و به ازای $m<-1$ منفی و در غیراین موارد مثبت است.

پس جدول زیر حاصل می‌شود :

m	$-\infty$ … -5	-5	-5 … -1	-1	-1 … 3	3	3 … $+\infty$
Δ	−	۰	+		+	۰	−
$\frac{c}{a}$	+		+		+		+
$-\frac{b}{a}$	−		−	∞	+		+
نتیجه	ریشه وجود ندارد	ریشهٔ مضاعف ۱ −	دو ریشهٔ منفی	یك ریشهٔ $x=0$	دو ریشهٔ مثبت	ریشهٔ مضاعف ۱	ریشه وجود ندارد

محاسبهٔ عباراتی که برحسب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم متقارن هستند

۲۰ـ تعریف ـ هرگاه در عبارتی که شامل x' و x'' باشد، x' را به x'' و x'' را به x' تبدیل کنیم وآن عبارت تغییر نکند، می‌گویند که عبارت مزبور نسبت به x' و x'' **متقارن** است، مانند :

$$x'^2+x''^2 \quad \text{و} \quad x'^3+x''^3 \quad \text{و} \quad \frac{1}{x'-3}+\frac{1}{x''-3}$$

۲۱ ـ ثابت می‌کنند که هر عبارت متقارن بر حسب x' و x'' را می‌توان بر حسب مجموع آنها $S=x'+x''$ و حاصل ضرب آنها $P=x'x''$ با عبارات منطق بدست آورد :

مثال :
$$x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=S^2-2P$$
$$x'^3+x''^3=(x'+x'')^3-3x'x''(x'+x'')=S^3-3PS$$
$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{S}{P}$$

و غیره . بنابراین ، برای محاسبهٔ یك چنین عباراتی باید اول آنها را بر حسب S و P بدست آورد و سپس به جای S و P مقادیر آنها را قرار داد . به این طریق ، از محاسبات طولانی و عبارات اصم اجتناب می‌شود .

۲۲ ـ مسئله ـ پارامتر m را طوری معین کنید که دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+(m-2)x+m+5=0$ در رابطهٔ $x'^2+x''^2=10$ صدق کنند .

حل ـ رابطهٔ داده شده برحسب x' و x'' متقارن است و می‌توان آن را چنین نوشت :

$$(x'+x'')^2-2x'x''-10=0$$

یا

$$(m-2)^2-2(m+5)-10=0$$

پس $m^2-6m-16=0$ وازاینجا: ۸و $m=-2$. بازای $m=-2$ معادلهٔ $x^2-4x+3=0$ حاصل می‌شود که دو ریشهٔ آن $x'=1$ و $x''=3$ در شرط مفروض صدق می‌کند .

به ازای $m=8$ معادله به‌صورت $x^2+6x+13=0$ درمی‌آید و ریشه ندارد؛ پس فقط $m=-2$ جواب مسئله است .

تمرین و مسئله

بدون حل کردن معادلات زیر، وجود و علامت ریشه‌های آنها را تحقیق کنید :

۱ـ $3x^2-5x+2=0$

۲ـ $x^2+9x+23=0$

۳ـ $-x^2+10x-25=0$

۴ـ $3x^2+2\sqrt{6}x+2=0$

۵ـ $8x^2+22x-5=0$

۶ـ $x^2-2x-15=0$

۷ـ $(x-3)^2+x^2=9-4x$

۸ـ $(2x-1)^2-3(x+2)^2=5-16x$

۹ـ $7x^2+11x+1=0$

معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که دو ریشهٔ آن، دو عدد یا دوعبارت حرفی زیر باشند :

۱۰ـ ۱ و ۲   ۱۱ـ -1 و $+2$ ۱۲ـ ۴ و -5

۱۳ـ $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ ۱۴ـ $\frac{3}{4}$ و $-\frac{2}{5}$ ۱۵ـ −۰/۱۵ و −۱/۴

۱۶- $۲-\sqrt{۳}$ و $۲+\sqrt{۳}$

۱۷- $(a+b)^۲$ و $-(a-b)^۲$

۱۸- $\frac{۱}{a-b}$ و $\frac{۱}{a+b}$

۱۹- $\frac{a-۱}{a}$ و $\frac{-a}{a-۱}$

دو عدد چنان تعیین کنید که :

۲۰- مجموع آنها ۸ و حاصل ضربشان ۱۲ باشد .

۲۱- « « ۵ « $\frac{۲۵}{۴}$ «

۲۲- « « ۱۷ « -۶۰ «

۲۳- « « ۶ « ۱۰ «

۲۴- « « $\frac{۵}{۶}$ « -۱ «

۲۵- « « $-\frac{۴}{۳}$ « $-\frac{۳}{۴}$ «

۲۶- « « $۲m+۳$ « $۲m+۲$ «

۲۷- « « $m-۲$ « $m-۳$ «

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که :

۲۸- هریك از دو ریشهٔ آن ، ۵ واحدکمتر از ریشههای معادلهٔ زیر باشد :

$$۲x^۲-۵x-۱=۰$$

۲۹- هریك از دو ریشهٔ آن ، ۳ برابر یکی از ریشههای معادلهٔ زیر باشد :

$$x^۲-۲x-۷=۰$$

۳۰- دو ریشهٔ آن، عکس ریشههای معادلهٔ $۴x^۲-۲x-۲=۰$ باشند .

۳۱- در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۳ax+a+۱=۰$ به جای a عددی بگذاریدکه یکی از دو ریشهٔ معادله دو برابر دیگری شود .

۳۲- در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۴x+a=۰$ به جای a عددی بگذارید که دو ریشهٔ معادله اولا متساوی شوند . ثانیاً یکی ازآنها دو برابر دیگری باشد . ثالثاً مجموع مجذورات آنها ۴ باشد .

۳۳- معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲-۱۱x+۴=۰$ مفروض است. مطلوب است تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومیکه اولا هرریشهٔ آن، سه برابریکیازریشههای این معادله باشد. ثانیاًهرریشهٔ آن، عکس ریشههای این معادله باشد. ثالثاًهر ریشهٔ آن، مساوی با دوبرابریکی از ریشههای اینمعادله بهعلاوهٔ عدد۴ باشد.

در وجود و علامت ریشههای معادلات زیر بر حسب m بحث کنید :

۳۴- $x^۲-۴x+m=۰$

۳۵- $x^۲+۲mx+۹=۰$

۳۶- $x^۲-۲mx+۳m=۰$

۳۷- $x^۲-۲(m+۱)x+۳(m+۱)=۰$

۳۸- $mx^۲-۳x+m=۰$

۳۹- $x^۲-(۳m-۲)x+۴=۰$

۴۰- $mx^۲-۲(m-۲)x+m-۳=۰$

۴۱- $x^۲-۲mx+(m-۳)^۲=۰$

۴۲- $mx^۲-۲(m+۱)x+m-۵=۰$

۴۳- $(۲m+۱)x^۲-۲x+m+۱=۰$

۴۴- در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ثابت کنیدکه دو عبارت زیر متساویند هرچه باشند x' و x'' :

$$A=\frac{۳x'^۲+۲x'x''-x''^۲}{۳x'-x''} \quad و \quad B=\frac{۳x''^۲+۲x'x''-x'^۲}{۳x''-x'}$$

ومقدار مشترك آنها را برحسب $x'+x''=S$ و $x'x''=P$ حسابکنید .

m را چنان معین کنیدکه روابط معین مفروض، مابین ریشههای معادلات زیر برقرار باشد :

۴۵- در معادلهٔ $(m+۱)x^۲-۲(m+۲)x+m-۳=۰$

رابطهٔ $(4x'+1)(4x''+1)=18$

۴۶ ـ درمعادلهٔ $mx^2-(m-4)x+2m=0$

رابطهٔ $2(x'^2+x''^2)=5x'x''$

۴۷ ـ درمعادلهٔ $(m-1)x^2-2mx+m+1=0$

رابطهٔ $4(x'^2+x''^2)=5x'^2x''^2$

۴۸ ـ درمعادلهٔ $x^2-(2m+1)x+m^2+2=0$

رابطهٔ $3x'x''-5(x'+x'')+7=0$

۴۹ ـ درمعادلهٔ $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$

رابطهٔ $16(x'+x'')^2=49x'^2x''^2$

۵۰ ـ درمعادلهٔ $x^2-(2m+1)x+m^2+2=0$

رابطهٔ $(3x'-5)(3x''-5)=4$

معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیدکه مابین دو ریشهٔ آن ، روابط زیر برقرار باشد :

۵۱ ـ
$$\begin{cases} x'x''+x'+x''-m=0 \\ x'x''+2(x'+x'')+4=0 \end{cases}$$

۵۲ ـ
$$\begin{cases} x'x''+x'+x''=m \\ x'x''-m(x'+x'')+1=0 \end{cases}$$

۵۳ ـ $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=5$ و $x'+x''+x'x''=1$

ج ـ معادلات اصم (گنگ)

۲۳ ـ هر معادله‌که لااقل یك جملهٔ اصم شامل مجهول معادله، در یکی از دو طرف آن، وجود داشته باشد ، به معادلهٔ اصم موسوم است .

در بسیاری موارد ، حل این قبیل معادلات ، به حل معادلات درجهٔ دوم منجر می‌شود .

برای حل معادلات اصم ، اگر فقط یك جملهٔ اصم موجود باشد ، آن را در یك طرف تساوی قرار داده باقی جمله‌ها را به طرف دیگر نقل می‌کنیم و طرفین را به قوه‌ای که برابر نمایندهٔ رادیکال باشد ، می‌رسانیم تا جملهٔ اصم از بین برود . اما هرگاه تعداد رادیکالها بیش ازیکی باشد ، چندین بار باید طرفین معادله را به قوه برسانیم .

ضمن حل معادلات اصم ، همواره باید تحقیق کردکه به ازای چه شرایطی طرفین معادله متساوی می‌شوند یا با چه شرایطی حل معادله و وجود جواب ممکن است و باید همواره شرایط مزبور را ضمن حل مسئله یا در تعیین جوابها رعایت کرد . بطور کلی باید پس از تعیین جوابها امتحان کرد که آیا این جوابها در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند یا نه ، زیرا ممکن است‌که در نتیجهٔ به قوه رساندن طرفین ، جوابهای خارجی پیدا شود . چنانکه اگر طرفین معادلهٔ $x=1$ را به قوهٔ ۲ برسانیم ، نتیجه می‌شود :

$$x^2=1 \qquad \text{یا} \qquad x^2-1=0$$

و این معادله دارای دو جواب $x=1$ و $x=-1$ می‌باشد که فقط اولی درمعادلهٔ مفروض صدق می‌کند .

مثال ۱ ـ حل معادلهٔ $x+\sqrt{x}=30$.

حل ـ معادله را چنین می‌نویسیم $\sqrt{x}=30-x$. واضح است که x باید بزرگتر ازصفر باشد وچون طرف چپ مثبت است، طرف راست هم باید مثبت باشد . باید $0<x<30$ باشد . چون طرفین را مجذور کنیم ، حاصل می‌شود :

$$x=900-60x+x^2 \quad \text{یا} \quad x^2-61x+900=0$$

که دارای دو جواب $x=25$ و $x=36$ است و فقط جواب $x=25$ در معادلهٔ مفروض صدق می‌کند .

تبصره ـ جواب $x=36$ متعلق به معادلهٔ $-\sqrt{x}=30-x$ می‌باشدکه چون مجذور شود، به همان صورت فوق درمی‌آید .

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ : $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=5$.

حل ـ چون دراین مورد دو رادیکال وجود دارد ، یکی ازآنها را دریك طرف قرار می‌دهیم و دیگری را به طرف دیگرمی‌بریم.

$$\sqrt{2x+1}=5-\sqrt{x} \quad \text{یا} \quad 2x+1=25+x-10\sqrt{x}$$

و معادلهٔ اخیر را چنین می‌نویسیم $10\sqrt{x}=24-x$ که چون طرفین آن را مجذورکنیم، حاصل می‌شود :

$$100x=(24-x)^2 \quad \text{یا} \quad x^2-148x+576=0$$

که دارای دو ریشهٔ $x'=4$ و $x''=144$ است و فقط اولی در معادله صدق می‌کند .

تبصره ـ جواب $x=144$ به معادلهٔ $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=5$ تعلق داردکه حل آن نیز منجر به حل معادلهٔ $x^2-148x+576=0$ می‌شود .

مثال ۳ ـ حل معادلهٔ :

$$\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x} \quad \frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$$

حل ـ واضح است کداین معادله وقتی‌امکان داردکه $a>0$ باشد.

حال ، طرفین را در $\sqrt{5a+x}$ ضرب می‌کنیم ، حاصل می‌شود : $\sqrt{25a^2-x^2}=7a-x$ ؛ واین معادله وقتی ممکن است که $x<7a$ باشد . حال ، طرفین را به قوهٔ ۲ می‌رسانیم ، معادلهٔ :

$$25a^2-x^2=49a^2+x^2-14ax$$

$$\text{یا} \quad 2x^2-14ax+24a^2=0$$

بدست می‌آید که دارای دو جواب $x=3a$ و $x=4a$ است و چون a مثبت است، هر دو جواب از $7a$ کوچکترند و در معادله صدق می‌کنند.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱ـ $\sqrt{2x-5}+4=x$ ۲ـ $3+\sqrt{x-1}=x$

۳ـ $3x+1=\sqrt{7x+1}$ ۴ـ $3x=4+\sqrt{8x-7}$

۵ـ $\sqrt{5x+4}=x+2$ ۶ـ $2\sqrt{x^2+2x}=x+1$

۷ـ $x+2\sqrt{x^2-11}=16$

۸ـ $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}=2$

۹ـ $x-\sqrt{4x-19}=4$

۱۰ـ $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}=3$

۱۱ـ $2x+\sqrt{(x+1)(x-5)}=18$

۱۲ـ $\sqrt{10x-3}+\sqrt{5x-3}=5\sqrt{3}$

د ـ حل دستگاههای دومجهولی که به کمك معادلات درجهٔ دوم حل می‌شوند

۲۴ ـ چون برای حل دستگاههای درجهٔ دوم قاعدهٔ کلی کمتروجود

دارد ، ذیلا سعی می‌کنیم که به وسیلهٔ مثالهای متعدد ، عمومی‌ترین راههایی را که برای حل این معادلات موجود است ، نشان دهیم .

مثال ۱ ـ حل دستگاه : $\begin{cases}x+y=15\\ xy=36\end{cases}$

حل ـ طرفین معادلهٔ اول را مجذور می‌کنیم، حاصل می‌شود :

$$x^2+2xy+y^2=225$$

ومعادلهٔ دوم را می‌توان چنین نوشت :

$$4xy=144$$

رابطهٔ دوم را عضو بعضو از رابطهٔ اول تفریق می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$x^2-2xy+y^2=81$$

پس $x-y=\pm 9$ ؛ و از آنجا دو دستگاه زیر بدست می‌آیدکه با دستگاههای مفروض، معادل هستند :

$$(1)\quad \begin{cases}x+y=15\\ x-y=9\end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases}x+y=15\\ x-y=-9\end{cases}$$

از اولی حاصل می‌شود : $x=12$ و $y=3$

و از دومی نتیجه می‌گردد : $x=3$ و $y=12$

مثال ۲ ـ مطلوب است حل دستگاه :

$$\begin{cases}x^2+y^2=185\\ x+y=17\end{cases}$$

حل ـ طرفین معادلهٔ دوم را مجذور وطرفین اولی را از آن تفریق

می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$xy=52 \quad \text{یا} \quad 2xy=104$$

حال، از دستگاه $\begin{cases}x+y=17\\ xy=52\end{cases}$ نتیجه می‌شود (مثال قبل) :

$x=13$ یا 4 و $y=4$ یا 13

مثال ۳ ـ حل دستگاه : $\begin{cases}3x-4y=5\\ 3x^2-xy-3y^2=21\end{cases}$

حل ـ ازمعادلهٔ اول حاصل می‌شود : $x=\frac{5+4y}{3}$ که چون در معادلهٔ دوم قرار دهیم، نتیجه می‌شود :

$$\frac{3(5+4y)^2}{9}-\frac{y(5+4y)}{3}-3y^2=21$$

یا پس از اختصار $3y^2+35y-38=0$

که دو جواب $y=1$ و $y=-\frac{38}{3}$ را بدست می‌دهد و جوابهای نظیر آنها برای x عبارت است از : $x=3$ و $x=-\frac{137}{9}$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱- $\begin{cases}x+y=20\\ xy=64\end{cases}$ ۲- $\begin{cases}x-y=9\\ xy=90\end{cases}$

۳- $\begin{cases}x^2+y^2=625\\ x+y=35\end{cases}$ ۴- $\begin{cases}x^2+y^2=164\\ x-y=2\end{cases}$

-۵ $\begin{cases} x^2-y^2=85 \\ x-y=5 \end{cases}$ -۶ $\begin{cases} x^2+y^2=208 \\ xy=96 \end{cases}$

-۷ $\begin{cases} x^2-y^2=55 \\ xy=24 \end{cases}$ -۸ $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \frac{x}{y}=2 \end{cases}$

-۹ $\begin{cases} x+y=2.5 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4.25 \end{cases}$ -۱۰ $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+xy+y^2=61 \end{cases}$

-۱۱ $\begin{cases} x+y=14 \\ x^2-xy+y^2=76 \end{cases}$ -۱۲ $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=62 \\ x^2-y^2+x-y=50 \end{cases}$

ه- علامت سه جمله‌ای درجهٔ دوم

و

موارد استعمال آن

۲۵- تعریف ـ هر عبارت جبری که پس از اختصار به‌صورت ax^2+bx+c درآید، به‌سه‌جمله‌ای درجهٔ‌دوم موسوم است. a ، b و c اعداد جبری هستند و $a\neq 0$ می‌باشد.

هرگاه سه جمله‌ای درجهٔ دوم را مساوی صفر قرار دهیم ، معادلهٔ درجهٔ دومی بدست می‌آید که ممکن است دارای دو ریشهٔ x' و x'' باشد . در این حالت ، اصطلاحاً این مقادیر را ریشه‌های سه جمله‌ای می‌نامند ومقدار b^2-4ac یعنی مبین معادلهٔ مزبوررا مبین سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم می‌گویند. واضح است‌که مقدار عددی سه جمله‌ای درجهٔ دوم فقط وقتی که x با ریشه‌های مزبور مساوی شود ، صفر خواهد شد و به

ازای سایر مقادیر x مخالف با صفر است . هرسه جمله‌ای درجهٔ دوم را باعلامت $f(x)$ یا y نمایش می‌دهند .

۲۶- یادآوری ـ علامت دوجمله‌ای درجهٔ اول $ax+b$:

می‌توان نوشت :

$$ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

مقدار داخل پرانتز به ازای $x=-\frac{b}{a}$ صفر وبه‌ازای $x>-\frac{b}{a}$ مثبت و به ازای $x<-\frac{b}{a}$ منفی است، پس:

علامت دوجمله‌ای درجهٔ اول $ax+b$ به ازای مقادیر x بزرگتر از $-\frac{b}{a}$ موافق علامت a و به ازای مقادیر x کوچکتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت a است .

۲۷ ـ علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ـ سه جمله‌ای درجهٔ دوم:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

را درنظر می‌گیریم. چون $a\neq 0$ است، مانند (شمارهٔ ۳) می‌توان نوشت:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

حال برحسب آنکه b^2-4ac منفی یا صفر یا مثبت باشد ، سه

حالت داریم :

حالت اول ـ $b^2-4ac<0$ ، در این حالت $4ac-b^2>0$

می‌باشد وعبارت را می‌توان چنین نوشت :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

مقدار داخل کروشه مجموع دو عبارت مثبت می‌باشد ، پس سه ـ جمله‌ای به ازای هیچ مقدار از x صفر نمی‌شود و قابل تجزیه به حاصل ضرب عاملهای درجهٔاول نیست وعلامت سه‌جمله‌ای دراین حالت همواره همان علامت a می‌باشد .

پس : **هرگاه مبین سه جمله‌ای درجهٔ دوم منفی باشد ، علامت سه ـ جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x همان علامت a است .**

حالت دوم ـ $b^2-4ac=0$ ، در این حالت سه جمله‌ای به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

پس : **هرگاه مبین سه جمله‌ای درجهٔ دوم صفر باشد ، علامت سه ـ جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x همان علامت a است .**

در این حالت سه جمله‌ای دارای ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ است که اگرآن را x' بنامیم ، می‌توان نوشت :

$$\boxed{f(x)=a(x-x')^2}$$

حالت سوم ـ $b^2-4ac>0$ ، دراین حالت عبارت $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ را می‌توان مجذور $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ دانست و سه جمله‌ای چنین نوشته می‌شود :

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left[x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$$

یا

$$\boxed{f(x)=a(x-x')(x-x'')}$$

در این حالت ، برای تعیین علامت سه جمله‌ای فرض می‌کنیم که ریشهٔ x' از ریشهٔ x'' بزرگترباشد وسه حالت تمیز می‌دهیم :

اولاً اگر مقدار عددی x از ریشهٔ x' بزرگتر باشد ، $x-x'$ و $x-x''$ هر دومثبت هستند و حاصل‌ضرب آنها هم مثبت است و علامت $f(x)$ همان علامت a است .

ثانیاً اگرمقدار عددی x از x' کوچکترولی از x'' بزرگترباشد، $x-x'$ منفی ولی $x-x''$ مثبت است. پس حاصل‌ضرب آنها منفی‌است. اگر a منفی باشد ، $f(x)$ مثبت است و اگر a مثبت باشد ، $f(x)$ منفی است ، پس علامت سه جمله‌ای درجهٔ دوم مخالف علامت a است .

ثالثاً اگر مقدار عددی x از x'' کوچکتر باشد ، $x-x'$ و $x-x''$ هردو منفی وحاصل‌ضرب آنها مثبت است وعلامت $f(x)$ همان علامت a می‌باشد .

وبالاخره به ازای $x=x'$ و $x=x''$ سه جمله‌ای درجهٔ دوم صفر می‌شود .

پس : **هرگاه مبین سه جمله‌ای درجهٔ دوم مثبت باشد، علامت سه ـ جمله‌ای به ازای مقادیر عددی x که از هر دو ریشه بزرگتر یا از هر دو ریشه‌کوچکتر باشد همان علامت a است . ولی به ازای اعدادی که مابین دو ریشه هستند (از یکی کوچکتر و از دیگری بزرگترند) ، علامت سه‌جمله‌ای مخالف علامت a است .**

بطور خلاصه : **علامت سه جمله‌ای درجهٔ دوم همیشه موافق علامت a است مگر وقتی‌که سه جمله‌ای دارای دو ریشه باشد و به‌جای x عددهایی بگذاریم که مابین این دو ریشه باشند و در این حالت علامت سه جمله‌ای مخالف علامت a خواهد بود .**

معمولاً مقادیری از x راکه از هر دو ریشه بزرگتر یا از هر دو ریشه‌کوچکترند مقادیر خارج دو ریشه‌گویند .

حل نامعادلات درجهٔ دوم

۲۸ــ هر نامعادله که پس از نقل تمام جمله‌ها به یك طرف و اختصار به یکی از دو صورت کلی :

$$(1)\quad ax^2+bx+c>0 \qquad \text{یا} \qquad ax^2+bx+c<0 \quad (2)$$

درآید، نامعادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود . همواره می‌توان هر نامعادلهٔ از نوع دوم را باضرب‌کردن طرفین آن در (-1) به صورت نامعادله‌ای از نوع اول درآورد .

مقصود از حل نامعادلهٔ $ax^2+bx+c>0$ تعیین همهٔ اعدادی است که چون به جای x گذارده شوند طرف اول نامعادله را مثبت

کنند . به‌عبارت دیگر، باید مقادیری از x را معین ساخت‌که به ازای آنها علامت یك سه جمله‌ای درجهٔ دوم مثبت باشد .

مثال ۱ ــ مطلوب است حل نامعادلهٔ $x^2+6x-7<0$.

حل ــ معادلهٔ $x^2+6x-7=0$ دارای دو ریشهٔ $x'=1$ و $x''=-7$ است وچون ضریب جملهٔ درجهٔ دوم مثبت است، سه‌جمله‌ای طرف اول به‌ازای عددهایی‌که مابین ۱ و ۷− باشند منفی خواهد بود .

$$-7<x<1$$

مثال ۲ ــ مطلوب است حل نامعادلهٔ $x^2-7x+10>0$.

حل ــ چون سه جمله‌ای $x^2-7x+10$ دو جواب $x'=5$ و $x''=2$ دارد وازطرفی ضریب x^2 مثبت است ، پس به ازای عددهایی که از ۵ بزرگتر باشند یا عددهایی‌که از ۲ کوچکتر باشند، سه جمله‌ای طرف اول مثبت می‌شود :

$$x>5 \qquad \text{یا} \qquad x<2$$

مثال ۳ ــ مطلوب است حل نامعادلهٔ $-x^2+x-4<0$.

حل ــ مبین سه جمله‌ای طرف اول منفی است پس علامت سه ـ جمله‌ای همواره علامت ضریب x^2 می‌باشد ، یعنی همیشه منفی است ، بنا بر این به ازای تمام اعدادی که به x نسبت داده شود نامعادله برقرار است .

۲۹ــ حل نامعادلاتی‌که یك طرف آنها حاصل ضرب چند عبارت درجهٔ اول یا دوم است ــ برای حل نامعادلاتی‌که به صورت کلی $A\times B\times C\times D\times \cdots >0$ باشند (A ، B ، C ، ...... چند جمله‌ایهای درجهٔ اول یا دوم می‌باشند) علامت هر عبارت را

جداگانه معین و همهٔ مقادیر x را که به ازای آنها هریك از عبارتهای مزبورمثبت یا منفی است تعیین‌کرده سپس از روی آنها علامت حاصل ـ ضربشان را معین می‌سازیم .

برای سهولت عمل بهتر این است که جوابهای هریك از چند ـ جمله‌ایها را معین کنیم و این اعداد را بترتیبی که از کوچکترین آنها شروع و به بزرگترین آنها ختم شود درجدولی ازچپ به راست بنویسیم و در فاصلهٔ مابین هر دو عدد، علامت هرعبارت و علامت حاصلضرب را معین کنیم .

مثال ــ مطلوب است حل نامعادلهٔ :

$$(x+1)(3-2x)(2x^2-8)>0$$

برای حل نامعادله جدول زیررا رسم می‌کنیم :

x	−∞ … −۲	−۲ … −۱	−۱ … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … ۲	۲ … +∞
علامت x+۱	−	−	۰ +	+	+
علامت ۳−۲x	+	+	+	۰ −	−
علامت ۲x²−۸	+	۰ −	−	−	۰ +
علامت حاصل ضرب	−	+	−	+	−

از این جدول معلوم می‌شود که به ازای $-2<x<-1$ و $\frac{3}{2}<x<2$ طرف اول نامعادلهٔ مفروض مثبت می‌باشد .

۳۰ــ نامعادلات کسری ــ نامعادلهٔ کسری نامعادله‌ای است به

صورت $\frac{f(x)}{f'(x)}>0$ که صورت و مخرج آن هر دو یا تنها مخرج آن شامل حرف مجهول باشد . برای حل این نامعادلات ، حتی‌المقدور باید صورت ومخرج را به حاصل‌ضرب عوامل درجهٔ اول یا درجهٔ دوم تجزیه کرد، سپس علامت هر عبارت و علامت حاصل ضرب و در نتیجه علامت کسر را مشخص‌کنیم .

تبصرهٔ ۱ ــ هیچوقت در حل نامعادلات کسری نباید از مخرج کسر صرف نظرکرد ؛ زیرا این مخرج نیز تغییر علامت می‌دهد و معلوم نیست دوطرف نامعادله رادرمقدارمثبت یامنفی ضرب‌کرده‌ایم، مگراینکه مطمئن باشیم‌که علامت مخرج همواره مثبت یامنفی است ؛ مثل‌کسری‌که مخرج‌آن مجذورکامل باشدکه دراین صورت علامت‌کسر علامت صورت آن خواهد بود .

تبصرهٔ ۲ ــ در حل نامعادلات کسری باید این نکته را درنظر داشت‌که علامت حاصل ضرب دومقدار، همیشه باعلامت نسبت‌آنها یکی است . بنا براین بهتر است به جای تعیین علامت کسر $\frac{f(x)}{f'(x)}$ علامت حاصل ضرب $f(x)\times f'(x)$ را معین‌کنیم ومطلب رجوع می‌شود به حل نامعادلاتی‌که موضوع شمارهٔ ۲۹ بوده‌اند .

مثال ــ مطلوب است حل نامعادلهٔ :

$$\frac{-x^2+3x+10}{x^3-1}>0$$

حل ــ صورت و مخرج‌کسرطرف اول نامعادله را به حاصل ضرب عوامل تجزیه می‌کنیم :

$$-x^2+3x+10=-(x+2)(x-5)$$
$$=(x+2)(5-x)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

علامت کسر طرف اول نامعادلهٔ مفروض همان علامت حاصل ضرب

$$(x+2)(5-x)(x-1)(x^2+x+1)$$

می‌باشد. پس علامت هر پرانتز را جداگانه معین می‌کنیم و نتایج حاصل را بترتیب در جدولی می‌نویسیم و فواصلی را که در آنها حاصل ضرب مفروض مثبت است معین می‌کنیم :

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
علامت $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
علامت $5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
علامت $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
علامت x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
نتیجه		$+$ جواب		$-$		$+$ جواب		$-$	

از این جدول معلوم می‌شود که علامت کسر مفروض بازای تمام اعدادکوچکتر از ۲− و بازای مقادیر $1<x<5$ مثبت است .

۳۱ـ تبصره ـ در بسیاری از نامعادلات کسری، حرف مجهول در هر دو طرف نامعادله وجود دارد، در این صورت قاعده این است‌که تمام جمله‌ها را به یك طرف نقل و تمام کسرها را به یك مخرج تحویل کنیم

وحل نامعادله به همان صورت‌کلی سابق انجام می‌گیرد .

تمرین و مسئله :

سه جمله‌ایهای درجهٔ دوم زیر را به دو عامل درجهٔ اول یا یك مجذور کامل یا مجموع دو مجذور کامل تبدیل کنید :

۱- x^2+4x+2 ۲- x^2+6x-7

۳- $2x^2+7x+3$ ۴- $4x^2-4x\sqrt{3}+x$

۵- $x^2-12x+30$ ۶- $2x^2+10x-72$

۷- $24x^2-10x+1$ ۸- $x^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)x+1$

۹- $4abx^2-2a(a+b^2)x+a^2b$

۱۰- $(a-b)^2x^2+2(a^2+b^2)x+(a+b)^2$

عبارتهای زیر را خلاصه کنید :

۱۱- $\dfrac{x^2-9}{x^2+4x-21}$ ۱۲- $\dfrac{x^2-6x-27}{x^2+9x+18}$

۱۳- $\dfrac{2x^2+7x-15}{8x^2-14x+3}$ ۱۴- $\dfrac{x^3+2ax^2+a^2x}{ax^2-x^3}$

۱۵- $\dfrac{(x^2+3x-4)(x^2-4x-5)}{(x^2-1)(x^2-x-20)}$

۱۶- $\dfrac{x}{x^2-3x-2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

۱۷- $\dfrac{x+1}{x^2+x-2}-\dfrac{x}{x^2-1}$

۱۸- $\dfrac{x^2-(a^2+b)x-2(a^4+b^2)+5a^2b}{x^2-3a^2x+2a^4+b(a^2-b)}$

نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱۹- $-3x^2+2x-1>0$ ۲۰- $5x^2+12x-6<0$

۲۱- $m^2-8m-9<0$

۲۲- $-25m^2+20m-4>0$

۲۳- $4x^3-10x^2+48x<0$

۲۴- $3x^3-12x^2+9x>0$

۲۵- $\frac{3}{2x-1}>x+2$

۲۶- $\frac{m-2}{m-4}>\frac{m+1}{m+3}$

۲۷- $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}<1$

۲۸- $(x-a)(x-b)(x-c)>0$

m را چنان انتخاب کنید که نامساویهای زیر به‌ازای جمیع مقادیر x برقرار باشند :

۲۹- $(m-1)x^2-4x+2m<0$

۳۰- $(m+1)x^2-2(m-1)x+2m-3>0$

۳۱- $mx^2+(m-1)x+m-1<0$

۳۲- $(m-2)x^2+2(2m-3)x+m-6>0$

۳۳- $(4-m)x^2-3x+4+m>0$

m را چنان انتخاب کنید که معادلات زیر دارای ریشهٔ حقیقی باشند :

۳۴- $mx^2+(m-1)x+2m=0$

۳۵- $(3m+1)x^2-(4m-1)x+12m=0$

۳۶- $(m+1)x^2+2mx+m-1=0$

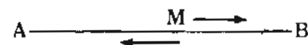
۳۷- $2mx^2+2(m-1)x+m-1=0$

۳۸- $x^2+(m-3)x-m-5=0$

فصل دوم

الف - بردارها

۱ - تعریف - نقطهٔ متحرك M می‌تواند روی قطعه‌خط AB در دو جهت مختلف حرکت کند : از A به‌طرف B یا از B به‌طرف A (شکل ۱) . هرگاه روی قطعه‌خط AB جهت حرکت نقطهٔ متحرك M را مشخص کنیم (مثلاً از A به طرف B) ، در این صورت قطعه‌خط AB را **بردار** یا **حامل** می‌نامند . هرگاه نقطهٔ متحرك M از A به طرف B حرکت کند ، A را مبدأ و B را منتهای بردار AB می‌خوانند . پس :



شکل ۱

بردار ، قطعه خطی است که روی آن جهت در نظر گرفته باشیم .

بردار را به وسیلهٔ اسامی نقاط مبدأ و منتهای آن خوانده ابتدا حرف مبدأ و بعد حرف منتهای آن را تلفظ می‌کنند و موقع نوشتن حرف مبدأ را در سمت چپ حرف منتهای آن می‌نویسند . مثلاً مبدأ بردار AB نقطهٔ A و منتهای آن نقطهٔ B است درصورتی‌که مبدأ بردار BA نقطهٔ B ومنتهای آن نقطهٔ A می‌باشد .



شکل ۲

۲۱- $m^2-8m-9<0$

۲۲- $-25m^2+20m-4>0$

۲۳- $4x^3-10x^2+48x<0$

۲۴- $3x^3-12x^2+9x>0$

۲۵- $-\frac{3}{2x-1}>x+2$

۲۶- $\frac{m-2}{m-4}\geqslant\frac{m+1}{m+3}$

۲۷- $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}<1$

۲۸- $(x-a)(x-b)(x-c)>0$

m را چنان انتخاب کنید که نامساویهای زیر به‌ازای جمیع مقادیر x برقرار باشند :

۲۹- $(m-1)x^2-4x+2m<0$

۳۰- $(m+1)x^2-2(m-1)x+2m-3>0$

۳۱- $mx^2+(m-1)x+m-1<0$

۳۲- $(m-2)x^2+2(2m-3)x+m-6>0$

۳۳- $(4-m)x^2-3x+4+m>0$

m را چنان انتخاب کنید که معادلات زیر دارای ریشهٔ حقیقی باشند :

۳۴- $mx^2+(m-1)x+2m=0$

۳۵- $(3m+1)x^2-(4m-1)x+12m=0$

۳۶- $(m+1)x^2+2mx+m-1=0$

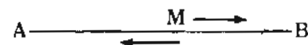
۳۷- $2mx^2+2(m-1)x+m-1=0$

۳۸- $x^2+(m-3)x-m-5=0$

فصل دوم

الف - بردارها

۱ - تعریف - نقطهٔ متحرك M می‌تواند روی قطعه‌خط AB در دو جهت مختلف حرکت کند :



شکل ۱

از A به‌طرف B یا از B به‌طرف A (شکل ۱) . هرگاه روی قطعه‌خط AB جهت حرکت نقطهٔ متحرك M را مشخص کنیم (مثلاً از A به طرف B) ، در این صورت قطعه‌خط AB را **بردار** یا **حامل** می‌نامند . هرگاه نقطهٔ متحرك M از A به طرف B حرکت کند ، A را مبدأ و B را منتهای بردار AB می‌خوانند . پس :

بردار ، قطعه خطی است که روی آن جهت در نظر گرفته باشیم .

بردار را به وسیلهٔ اسامی نقاط مبدأ و منتهای آن خوانده ابتدا حرف مبدأ و بعد حرف منتهای آن را تلفظ می‌کنند و موقع نوشتن حرف مبدأ را در سمت چپ حرف منتهای آن می‌نویسند . مثلاً مبدأ بردار AB نقطهٔ A و منتهای آن نقطهٔ B است درصورتی که مبدأ بردار BA نقطهٔ B ومنتهای آن نقطهٔ A می‌باشد .



شکل ۲

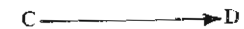
معمولاً در منتهای بردار علامت سهم می‌گذارند و به این وسیله جهت آن را مشخص می‌کنند (شکل ۲). بردار AB را به یکی از دو صورت (AB) یا $\overrightarrow{AB}$ می‌نویسند.

خط راستی راکه بردار روی آن قرار دارد، **محمل** بردار می‌نامند.
درشکل ۲، خط راست xy محمل بردار AB است.

هرگاه محملهای دو بردار بر هم منطبق یا با هم موازی باشند، می‌گویندکه **راستای آن دو بردار یکی است**.

۲ ـ بردارهای همسنگ ـ دو بردار را در صورتی **همسنگ** می‌نامند که هر دو دارای یك راستا و یك جهت و یك طول باشند (شکل۳). همسنگ‌بودن دو بردار AB و CD را به‌وسیلهٔ تساوی $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ می‌نمایانند.





شکل ۳

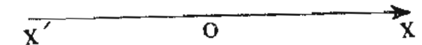
۳ ـ بردارهای متقابل ـ دو بردار را در صورتی **متقابل** می‌نامندکه راستاشان یکی باشد وطولشان متساوی ولی جهتشان مختلف باشد (شکل ۴).





شکل ۴

۴ـ محور ـ محور، خط راست نامحدودی است مانند x'x که روی آن یك جهت مثبت (مثلاً از x' به طرف x) اختیار کرده باشیم. جهت مثبت محور را به وسیلهٔ یك سهم نمایش



شکل ۵

می‌دهند و معمولاً برهرمحور نقطه‌ای مانند O را مبدأ اختیارکرده وضع سایرنقاط محور را نسبت به‌آن معین می‌کنند؛ برای‌آنکه برسانیم نقطهٔ O روی محور x'x مبدأ اختیارشده، می‌نویسیم محور x'ox (شکل۵).

۵ ـ حاصل ضرب برداردر یك‌عدد ـ نسبت‌دو بردارمتوازی ـ

مقصود از ضرب کردن $\overrightarrow{AB}$ در عدد جبری m، بدست آوردن بردار دیگری است که:

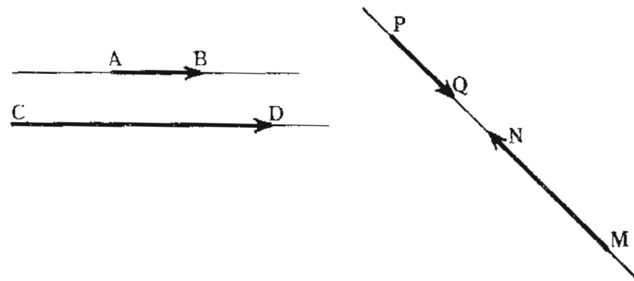
اولاً با $\overrightarrow{AB}$ موازی یا با آن روی یك خط راست‌واقع باشد.

ثانیاً طول آن $|m|$ برابر طول AB باشد *

ثالثاً جهت آن در صورتی که m مثبت باشد، همان جهت بردار، و درصورتی‌که m منفی باشد، خلاف جهت آن اختیار شود.

مثلا درشکل ۶، بردار CD مساوی با سه برابر بردار AB است و $\overrightarrow{MN}$ مساوی است با $-۲\times\overrightarrow{PQ}$ و می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{CD}=۳\times\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{MN}=-۲\times\overrightarrow{PQ}$$



شکل ۶

* مقصود از علامت $|m|$ قدرمطلق عدد جبری m می‌باشد.

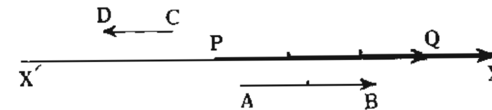
درصورتی که داشته باشیم $\overrightarrow{AP} = m \times \overrightarrow{A'P'}$ ، عدد جبری m را نسبت بردار AP به بردار A'P' می‌نامند و می‌نویسند .

$$m = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{A'P'}}$$

مثلاً درشکل ۶ داریم : $\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = ۳$ و $\frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{PQ}} = -۲$

دقت کنید : فقط در صورتی می‌توان از نسبت دو بردار گفتگو کرد که آن دو بردار دارای یك راستا باشند ، یعنی یا متوازی باشند یا روی یك خط راست واقع باشند .

۶ـ اندازهٔ جبری یك بردار روی یك محور ـ محور x'x و بردار AB را که بر x'x منطبق یا با آن موازی است ، در نظر می‌گیریم . در این صورت اندازهٔ جبری $\overrightarrow{AB}$ که آن را باعلامت $\overline{AB}$ نمایش می‌دهیم ، عددی است جبری که قدر مطلق آن طول قطعه‌خط AB و علامت آن مثبت یا منفی است بنا بر آنکه بردار AB با محور x'x دارای یك جهت باشد یا در خلاف جهت یکدیگر باشند . مثلاً درشکل ۷ اگر طول قطعه‌خط CD واحد باشد ، داریم :



شکل ۷

$\overline{PQ} = +۳$ و $\overline{CD} = -۱$ و $\overline{AB} = +۲$

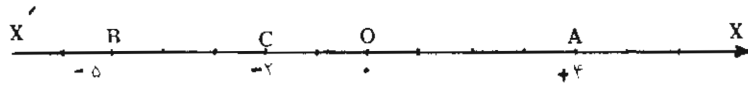
تبصره ـ سه علامت قراردادی AB و $\overrightarrow{AB}$ و $\overline{AB}$ را نباید با هم اشتباه کرد :

AB : یعنی قطعه خط AB یا طول AB .

$\overrightarrow{AB}$: یعنی بردار به مبدأ A و به منتهای B .

$\overline{AB}$: یعنی اندازهٔ جبری $\overrightarrow{AB}$ روی محوری که بر آن منطبق یا با آن موازی است .

۷ـ طول یك نقطه روی یك محور ـ محور x'x (شکل ۸) را در نظر می‌گیریم و روی آن نقطهٔ ثابتی مانند O به نام **مبدأ طولها** اختیار می‌کنیم . دراین صورت اندازهٔ جبری $\overrightarrow{OA}$ را **طول** یا **آبسیس** نقطهٔ A می‌نامند .



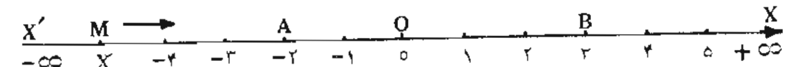
شکل ۸

$\overline{OA} = +۴$ یعنی طول نقطهٔ A مساوی ۴+ است .

$\overline{OB} = -۵$ یعنی طول نقطهٔ B مساوی ۵− است .

برعکس بهازای هرعدد جبری، یك نقطه وفقط یکی روی محور می‌توان یافت که طول آن مساوی این عدد باشد . مثلاً نظیر عدد ۲− نقطهٔ C را روی محور می‌توان یافت بقسمی که $\overline{OC} = -۲$. برای تعیین نقطهٔ C کافی است که ابتدا از O در جهت منفی قطعه‌خط $OC = ۲$ را جدا کنیم . به عبارت دیگر، **وضع یك نقطه روی یك محور به وسیلهٔ طول آن کاملاً معین می‌شود** .

۸ـ مورد استعمال دراعداد جبری ـ وقتی که یك نقطهٔ M محور X'X را در جهت مثبت می‌پیماید ، طول آن x ، تمام مقادیر جبری ممکن را به ترتیب صعودی اختیار می‌کند (شکل ۹) .



شکل ۹

زیرا از X' تا O مقدار $x=\overline{OM}$ منفی است و قدر مطلق آن تنزل می‌کند وبنابراین x ترقی می‌کند. از O تا X برعکس، x مثبت است وقدرمطلق آن ترقی می‌کند ، پس بازهم ترقی می‌کند .

از این رو معلوم می‌شود که اگر مثلا دو نقطهٔ A به طول ۲− و B به طول ۳+ را روی محور $X'X$ اختیار کنیم ، شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ M به طول x روی نیم‌خط BX یا قطعه‌خط AB یا نیم خط AX' واقع باشد ، از این قرار است :

اولا روی نیم‌خط AX'	$x<-۲$
ثانیاً روی نیم‌خط BX	$x>+۳$
ثالثاً روی قطعه‌خط AB	$-۲<x<+۳$

در حالت اخیر می‌گویند که x متعلق به **فاصلهٔ** (۳+ و ۲−) است .

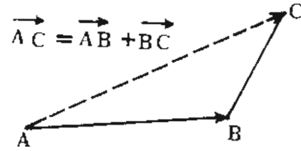
وقتی که M روی محور بینهایت دور شود ، قدر مطلق طول آن x ، از هرعدد اختیاری‌که قبلاً درنظرگرفته شده باشد بزرگتر می‌شود . دراین‌صورت می‌گویندکه‌طول x بینهایت شده‌است وچنین می‌نویسند :

$x=+\infty$ ، درحالتی‌که M در جهت مثبت بینهایت دور شود .

$x=-\infty$ ، درحالتی‌که M در جهت منفی بینهایت دور شود .

۹ ـ مجموع هندسی دو بردار ـ دو بردار متوالی AB و BC

رادرنظرمی‌گیریم، یعنی‌طوری‌که منتهای‌اولی مبدأدومی باشد(شکل۱۰).

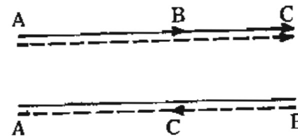


شکل ۱۰

در این صورت بردار AC را مجموع هندسی دو بردار AB و BC می نامند .

مجموع هندسی دو بردار متوالی برداری است‌که مبدأش مبدأ اولی و منتهایش منتهای دومی باشد . و چنین می نویسند :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$



شکل ۱۱

این تعریف در مورد دو بردار متوالی‌که محملشان یکی باشد نیزصحیح‌است (شکل۱۱).

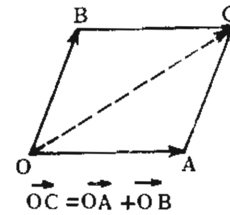
برای اینکه مجموع هندسی‌دوبردار غیرمتوالی را بدست‌آوریم، کافی است‌که دوبردار متوالی رسم‌کنیم‌که مرتباً باآن دوبردار همسنگ باشند ؛ و بخصوص ، مجموع هندسی $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ که درمبدأ مشترك هستند،بهاین‌طریق بدست‌می‌آیدکه متوازی‌الاضلاع AOBC (شکل۱۲) را رسم‌کنیم .

داریم : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ و چون $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ ،

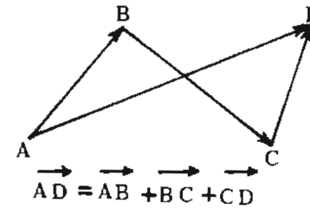
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

به‌همین روش می‌توان مجموع هندسی چند بردار را تعریف کرد .

مثلا در شکل ۱۳ داریم : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$



شکل ۱۲



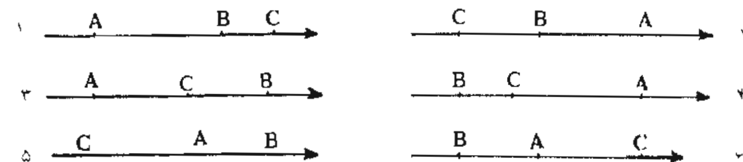
شکل ۱۳

توجه کنید ! عموماً مجموع طولهای چندین بردار ، مساوی با طول مجموع هندسی این چند بردار نیست .

رابطهٔ شال

۱۰ ـ قضیهٔ ۱ ـ اندازهٔ جبری مجموع هندسی دو بردار متوالی که روی یك محور قرار گرفته باشند مساوی است با مجموع اندازه‌های جبری این دو بردار ـ در واقع باید ثابت‌کنیم که ازتساوی برداری $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$ تساوی جبری $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ نتیجه می‌شود. رابطهٔ اخیررا رابطهٔ شال می‌نامند (به نام ریاضیدان فرانسوی ۱۷۹۳ـ۱۸۸۰ میلادی) .

برهان ـ شش حالت مختلف برای شکل ممکن‌است(شکل۱۴). چون طرز استدلال در همهٔ حالات یکی است ، قضیه را فقط در حالت پنجم ثابت می‌کنیم و استدلال آن را در حالات دیگر به عنوان تمرین به‌عهدهٔ دانش‌آموزان می‌گذاریم .


شکل ۱۴

در حالت پنجم روی شکل دیده می‌شود $\overline{CB}=\overline{CA}+\overline{AB}$ یا $-\overline{BC}=-\overline{AC}+\overline{AB}$ و با نقل و انتقال جملهها حاصل می‌شود :

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

۱۱ ـ تعمیم رابطهٔ شال ـ اگر به جای سه نقطه چندین نقطه روی یك محور اختیار کنیم ، می‌توان رابطهٔ شال را تعمیم داد . مثلا اگر چهار نقطهٔ دلخواه A ، B ، C و D روی یك محور واقع باشند (شکل ۱۵)، می‌توان نوشت :

$$\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD}$$



شکل ۱۵

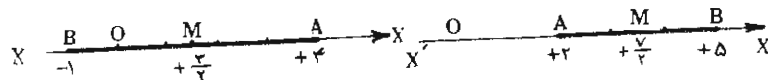
و از آنجا :

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$$

۱۲ ـ قضیهٔ ۲ ـ اندازهٔ جبری یك بردار روی یك محور مساوی است با طول منتهای آن منهای طول مبدأ آن .

قضیهٔ شال را در مورد سه نقطهٔ A ، O و B بکار می‌بریم (شکلهای ۱۶ و ۱۷) :

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB} \quad \text{یا} \quad \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$



شکل ۱۶ شکل ۱۷

اگر طولهای نقاط A و B را بترتیب a و b بنامیم ، چنین خواهیم داشت :

$$\overline{AB}=b-a$$

مثلا در شکل ۱۶ : $a=+2$ و $b=+5$

پس : $\overline{AB}=(+5)-(+2)=+3$

و در شکل ۱۷ : $a=+4$ و $b=-1$

پس : $\overline{AB}=(-1)-(+4)=-5$

۱۳ ـ طول وسط یك قطعه خط ـ طول وسط هر قطعه خط مساوی است با نصف مجموع طولهای دوسر آن قطعه خط .

فرض کنیم‌که M وسط قطعه‌خط AB باشد (شکلهای ۱۶و۱۷)؛

دراین صورت دو بردار AM و MB متساویند وداریم : $\overline{AM}=\overline{MB}$

یا : $\overline{OM}-\overline{OA}=\overline{OB}-\overline{OM}$ یا $2\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{OB}$

و از آنجا : $$\overline{OM}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$$

اگر طولهای نقاط A ، B و M را بترتیب a ، b و m بنامیم،

چنین خواهیم داشت : $$m=\frac{a+b}{2}$$

مثلا درشکل ۱۶ : $\overline{OM}=\frac{+2+5}{2}=\frac{7}{2}$

و در شکل ۱۷ : $\overline{OM}=\frac{+4-1}{2}=\frac{3}{2}$

تمرین :

۱ـ دو بردار OA و OB را در نظر گرفته وسط AB را I می‌نامیم؛

ثابت‌کنید : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$ و $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

۲ـ اگر $\overline{OA}=+7$ و $\overline{OB}=-5$ و $\overline{OC}=+13$ باشد

اولاً ـ صحت رابطهٔ شال یعنی $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ را تحقیق کنید.

ثانیاً ـ صحت روابط : $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ و $\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}$ را تحقیق کنید .

ثالثاً ـ طولهای نقاط M ، N و P ، اوساط BC ، CA و AB را حساب کنید .

۳ـ روی محوری نقاط A و B به‌طولهای a و b را درنظرمی‌گیریم. مطلوب است تعیین طولهای نقاط M و N که قطعه‌خط AB را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند ، حالت مخصوص $a=+15$ و $b=-9$.

۴ـ مسئلهٔ قبل را برای نقاطی که قطعه‌خط AB را به ۴ یا ۶ یا ۸ قسمت متساوی تقسیم می‌کنند حل‌کنید .

۵ـ روی محوری نقاط A و B به‌طولهای a و b رادرنظرمی‌گیریم. مطلوب است تعیین طول نقطه‌ای مانند M بطوری‌که $\overline{AM}=k\cdot\overline{MB}$ باشد (k عدد معلومی است) . حالت مخصوص :

$a=-4$ ، $b=10$ و $k=-2/5$.

۶ـ اگر چهار نقطهٔ A ، B ، C و D به طولهای a ، b ، c و d روی محوری مفروض باشند :

اولا ثابت‌کنیدکه عموماً یك نقطهٔ M وجود دارد بقسمی‌که داشته‌باشیم:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$$

ثانیاً اگر وسط قطعه‌خطهای AB و CD یکی باشد، چه خواهد شد؟

حالت مخصوص : $a=+8$ ، $b=-3$ ، $c=+11$ و $d=+1$

۷ـ روی محوری چهار نقطهٔ A ، B ، C و D را درنظرمی‌گیریم

بقسمی‌که داشته باشیم : $\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$

اولا ـ ثابت‌کنیدکه a ، b ، c و d طولهای این چهار نقطه در این رابطه صدق می‌کنند : $(a+b)(c+d)=2(ab+cd)$

ثانیاً ـ اگر I و J اوساط قطعه خطهای AB و CD باشند، ازرابطهٔ فوق روابط زیر را نتیجه بگیرید :

$$\overline{IA}^2=\overline{IB}^2=\overline{IC}\cdot\overline{ID}$$

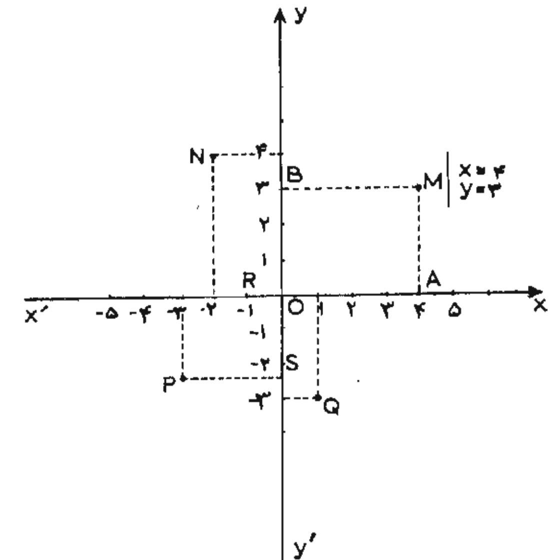
و
$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}+\overline{OC}\cdot\overline{OD}=2\overline{OI}\cdot\overline{OJ}$$

و
$$\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{BD}}=0$$

و
$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$$

ب ـ مختصات نقطه

۱۴ـ تعیین مواضع نقاط در صفحه ـ در صفحه‌ای دو محور عمود بر هم x'x و y'y را در نظر می‌گیریم و مبدأ مشترك این دو محور را نقطهٔ تلاقی آنها O اختیار می‌کنیم وفرض می‌کنیم M یك نقطه ازصفحه باشد (شکل ۱۸) . از M عمودهای MA و MB را بترتیب بر



شکل ۱۸

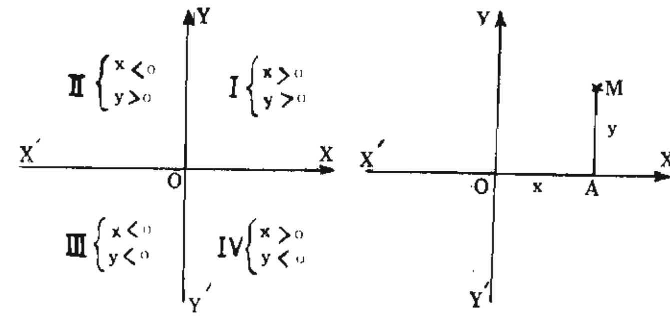
x'x و y'y فرود می‌آوریم تا مستطیل OAMB بوجود آید . اگر وضع نقاط A و B روی دو محور معلوم باشد ، وضع نقطهٔ M نیز در صفحه مشخص می‌شود . وضع نقاط A و B وقتی مشخص است که اندازه‌های جبری $\overline{OA}=x$ و $\overline{OB}=y$ معین باشد .

x را **طول** یا **آبسیس** نقطهٔ M و y را **عرض** یا **اُرْدُنهٔ** نقطهٔ M می نامند . مجموعهٔ دوعدد x و y را **مختصات نقطهٔ M** ومحورهای x'x وy'y را **محورهای مختصات** و نقطهٔ O رامبدأمختصات می نامند. x'x محور طولها و y'y محور عرضهاست .

این نکته را باید در نظر داشت‌که مختصات نقطهٔ M عبارتند از اندازه‌های جبری تصاویر بردار OM روی محور x'x و روی محور y'y . روی شکل ۱۸، x=+۴ و y=+۳ است . نقطهٔ M نقطه‌ای است‌که به وسیلهٔ دوعدد (+۳ و +۴) نمایش داده شده است .

بعکس برای اینکه نقطهٔ M به مختصات x و y را مشخص‌کنیم ، کافی است که روی x'x نقطهٔ A را چنان مشخص کنیم که $\overline{OA}=x$ باشد وروی y'y نقطهٔ B را قسمی معین‌کنیم که $\overline{OB}=y$ باشد و سپس مستطیل AOBM را رسم‌کنیم .

می‌توانیم بعد ازتعیین نقطهٔ A خطی از A به موازات y'y رسم کنیم و روی این خط قطعه‌خط $AM=|y|$ را جداکنیم به شرط آنکه اگر y مثبت باشد ، این قطعه خط در جهت Oy جدا شود واگر y منفی باشد درجهت Oy' جدا شود (شکل ۱۹) .



شکل ۲۰ — شکل ۱۹

روی شکل ۱۸، بادرنظر گرفتن ملاحظات فوق ، نقاط زیر رسم شده‌اند:

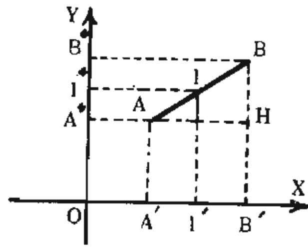
$$N\begin{cases}x=-2\\y=+4\end{cases}\qquad P\begin{cases}x=-3\\y=-2/5\end{cases}\qquad Q\begin{cases}x=+1\\y=-3\end{cases}$$

$$R\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}\qquad S\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$$

۱۵ـ ملاحظات ـ اولاً ـ مختصات مبدأ O عبارت است از $x=0$ و $y=0$. نقاط محور $x'x$ به وسیلهٔ رابطهٔ $y=0$ ونقاط محور $y'y$ به وسیلهٔ رابطهٔ $x=0$ مشخص می‌شوند . **ثانیاً ـ** محورهای مختصات، صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند که روی شکل ۲۰ شماره ـ بندی شده است ، چنانکه درشکل مزبور ملاحظه می‌شود، نقاط ناحیهٔ اول دارای طول و عرض مثبت هستند؛ در ناحیهٔ دوم، طول منفی و عرض مثبت است و در ناحیهٔ سوم، طول وعرض همهٔ نقاط منفی است و بالاخره نقاط ناحیهٔ چهارم دارای طول مثبت و عرض منفی هستند . **ثالثاً ـ** نیمساز زوایای xoy و $x'oy'$ را نیمساز ناحیهٔ اول و نیمساز زوایای yox' و $y'ox$ را نیمساز ناحیهٔ دوم زوایای محورهای مختصات می‌نامند .

۱۶ ـ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1 \text{ و } y_1)$ و $B(x_2 \text{ و } y_2)$ ـ فرض

می‌کنیم که A' و B' تصاویر A و B روی محور $x'x$ و A'' و B'' تصاویر A و B روی محور $y'y$ باشند وفصل مشترک $A''A$ و $B'B$ را H می‌نامیم (شکل ۲۱) . طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم :



شکل ۲۱

$$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{HB}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{A''B''}^2$$

اما

$$\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}=x_2-x_1$$

و

$$\overline{A''B''}=\overline{OB''}-\overline{OA''}=y_2-y_1$$

پس :

$$\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

بخصوص، فاصلهٔ یك نقطهٔ $M(x \text{ و } y)$ از مبدأ مختصات، از دستور $OM=\sqrt{x^2+y^2}$ بدست می‌آید .

۱۷ـ مختصات وسط یك قطعه‌خط ـ فرض کنیم که می‌خواهیم مختصات x و y نقطهٔ I ، وسط قطعه‌خط AB را معین کنیم (شکل۲۱). نقطهٔ I' تصویر I روی $x'x$ وسط قطعه‌خط $A'B'$ است . پس داریم (شمارهٔ ۱۳) :

$$\overline{OI'}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA'}+\overline{OB'}\right)$$

، یعنی :

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

و به همین شیوه معلوم می‌شود که

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

پس : طول (یا عرض) وسط یك قطعه‌خط ، مساوی است با نصف مجموع طولها (یا عرضهای) دوسرقطعه خط .

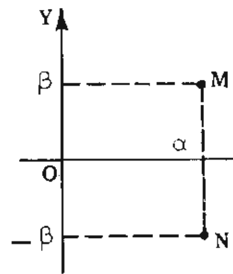
۱۸ـ مختصات نقاط متقارن ـ واضح است‌که نقاط $M(\alpha$ و $\beta)$ و $N(\alpha$ و $-\beta)$ نسبت به‌محور $x'x$ قرینهٔ یکدیگرند (شکل ۲۲). همچنین نقاط $M(\alpha$ و $\beta)$ و $P(-\alpha$ و $\beta)$ نسبت به محور $y'y$ قرینهٔ یکدیگر ند (شکل ۲۳) .

بطورکلی نقاط $M\Big|{m+\alpha \atop \beta}$ و $M'\Big|{m-\alpha \atop \beta}$ نسبت به خط راست (Δ) که با محور $y'y$ موازی است و طول همهٔ نقاطش $x=m$ می‌باشد، قرینهٔ یکدیگر ند (شکل ۲۴) .

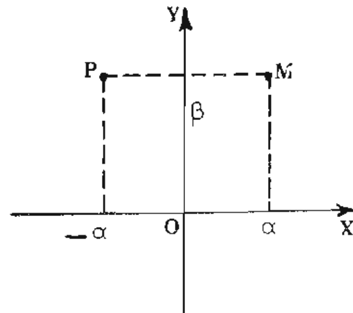
همچنین نقاط $M\Big|{\alpha \atop b+\beta}$ و $M'\Big|{\alpha \atop b-\beta}$ نسبت به‌خط راست (D) که با محور $x'x$ موازی است وعرض همهٔ نقاط آن $y=b$ است، قرینهٔ یکدیگر ند (شکل ۲۵) .

نقاط $M\Big|{\alpha \atop \beta}$ و $M'\Big|{-\alpha \atop -\beta}$ نسبت به مبدأ مختصات قرینهٔ یکدیگر می‌باشند (شکل ۲۵ـ۱) .

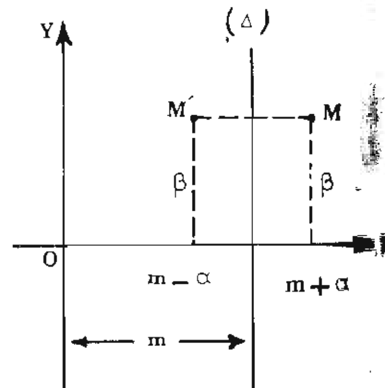
بطورکلی دو نقطهٔ $M\Big|{\alpha-h \atop \beta-k}$ و $M'\Big|{\alpha+h \atop \beta+k}$ نسبت به‌نقطهٔ $A\Big|{\alpha \atop \beta}$ قرینهٔ یکدیگر ند ، زیرا نقطهٔ A وسط MM' است . (شکل ۲۵ـ۲)



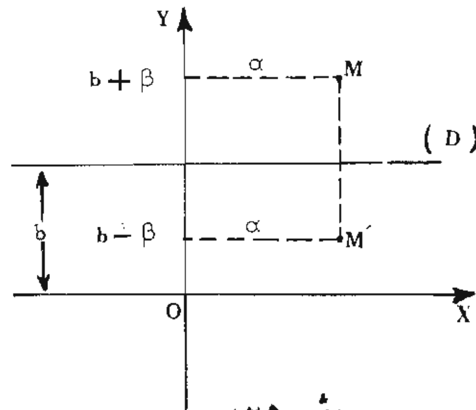
(ش ۲۲)



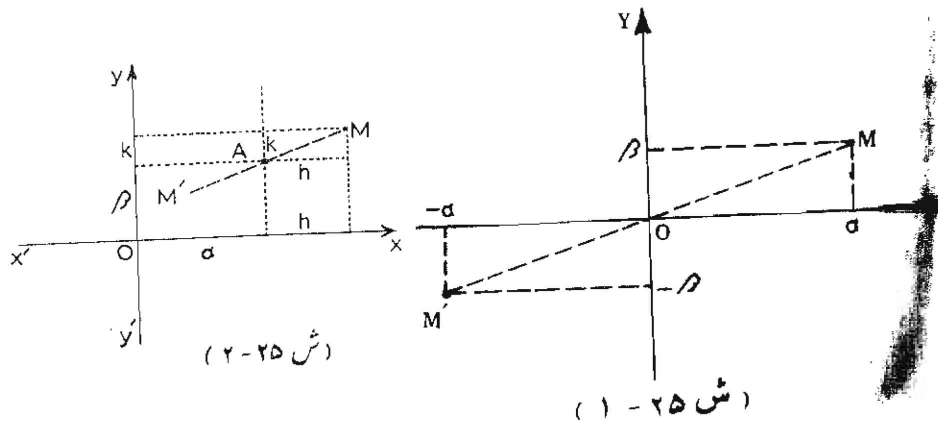
(ش ۲۳)



(ش ۲۴)



(ش ۲۵)



(ش ۲۵ - ۱)

(ش ۲۵ - ۲)

۱۹- انتقال محورهای مختصات - از نقطهٔ $\omega(x_0 , y_0)$ محورهای X'X و Y'Y را بترتیب بموازات x'x و y'y ومتحدالجهت با آنها رسم می‌کنیم (شکل ۲۶). حال نقطهٔ M(x و y) از صفحه را در نظر گرفته مختصات آن را نسبت به محورهای جدید ωX و ωY مساوی X و Y فرض می‌کنیم؛ داریم:

$$\overline{OP}=x \quad , \quad \overline{OQ}=y \quad , \quad \overline{\omega R}=X \quad , \quad \overline{\omega S}=Y$$

وهمواره طبق رابطهٔ شال می‌توان نوشت:

$$\overline{OP}=\overline{OI}+\overline{IP}=\overline{OI}+\overline{\omega R} \quad , \quad \overline{OQ}=\overline{OJ}+\overline{JQ}=\overline{OJ}+\overline{\omega S}$$

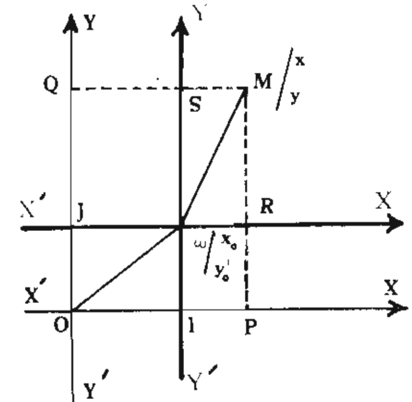
یا

$$\boxed{x = x_0 + X}$$

و

$$\boxed{y = y_0 + Y}$$

این دو دستور عبارتند از دستورهای تغییر محورهای مختصات: **طول قدیم نقطه مساوی است با طول مبدأ جدید بعلاوه طول جدید نقطه**. برای عرضها نیز قاعدهٔ متشابهی وجود دارد.



شکل۲۶

مثال - اگر مختصات نقطهٔ ω (مبدأ جدید) در دستگاه xoy مساوی با $\left|\begin{matrix}+۱\\+۱\end{matrix}\right.$ باشند ونقطهٔ $M\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ را در نظر بگیریم، مختصات جدید نقطهٔ M در دستگاه XωY عبارتند از:

$$M\left|\begin{matrix}X=۲-۱=۱\\Y=۳-۱=۲\end{matrix}\right.$$

تمرین

۱- نقاط زیر را در صفحهٔ دو محور مختصات عمود بر هم معین کنید (واحد طول سانتیمتر است):

A(۰ و ۰) ، B(۰ و ۱) ، C(۱ و ۰) ، D(۱ و ۱)

$F(۱ و \frac{۵}{۲})$ ، $E(\frac{۱}{۴} و -\frac{۳}{۴})$ ، G(-۱ و -۲)

۲- مختصات قرینهٔ هریك ازنقاط فوق را اولا نسبت به محور x'x ، ثانیاً نسبت به محور y'y ، ثالثاً نسبت به مبدأ O معلوم‌کنید.

۳- دو نقطهٔ P و Q روی محور x'x اولی به طول ۳- و دومی به طول ۱ مفروض است. مطلوب است محاسبهٔ اندازهٔ جبری بردارهای PQ و QP.

۴- نقاط P(a و b) و Q(-a و -b) و R(b و a) را تعیین وثابت‌کنیدکه:

اولا $OP=OR=OQ$ ثانیاً $\widehat{xOP}=\widehat{ROy}$

۵- نقاط A(۴ و ۱) و B(۰ و ۳) و C(-۲ و ۱) و D(-۳ و -۶) مفروضند. فاصلهٔ آنها را از یکدیگر وهمچنین فاصلهٔ هریك ازآنها را از مبدأ O حساب‌کنید.

۶- مختصات وسط هریك از قطعه‌خطهایی که دونقطهٔ دلخواه از نقاط مسئلهٔ قبل را به هم متصل می‌سازند، حساب‌کنید.

۷- فاصلهٔ نقطهٔ (۱۸- و ۱۰) را از دو نقطهٔ (۶ و ۳) و(۲ و۵-) حساب‌کرده ثابت‌کنیدکه این فواصل، متساویند.

۸- يك‌کشتی ۸کیلومتر درسمت شمال و۶ کیلومتر در سمت مشرق يك چراغ دریایی واقع است؛کشتی دیگری ۳کیلومتر درسمت شمال و ۶کیلومتر در سمت مغرب چراغ مزبور واقع است. فاصلهٔ دو کشتی را از یکدیگر و از چراغ دریایی حساب کنید.

۹- تحقیق کنید که نقاط (۷۱ و ۷۱) ، (۹ و ۲۷) ، (۰ و ۰) ، (۱ — و ۱۳ —) و (۱۶ و ۶۴ —) همگی روی یك دایره واقعند که مرکزش نقطهٔ (۸۴ و ۱۳ —) وشعاعش ۸۵ است .

۱۰- مختصات سه رأس مثلثی عبارت است از A(۳و۳) و B(۰ و ۱۰ —) و C(۲ و ۴ —) . مطلوب است اولا رسم مثلث . ثانیاً محاسبهٔ طول اضلاع ومحیط آن . ثالثاً محاسبهٔ طول میانهٔ AM . رابعاً مختصات رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی‌که AB و AC دوضلع آن باشند .

۱۱- نقاط A (۲ و ۱ —) و B (۳ و ۵) مفروضند . فرض می‌کنیم یك یاهردومحور باحفظ امتداد وجهتشان تغییرمکان دهند بطریقی‌که مختصات مبدأ جدید اولا (۰ و ۴ —) ثانیاً (۲ و ۰) ثالثاً (۳ — و ۴) شود. دراین صورت مختصات جدید A و B را حساب‌کنید .

۱۲- ثابت‌کنیدکه مختصات محل تلاقی ۳ میانهٔ هرمثلث مساوی است باثلث مجموع مختصات همنام‌آن در ۳ رأس مثلث .

ج - کلیات راجع به توابع

۲۰ - متغیر - اگر عدد جبری x بتواند مقادیر مختلف اختیار کند ، آن را متغیر می‌نامند . مثلا اگر نقطهٔ M روی محور x'Ox تغییرمکان‌دهد، طول آن $\overline{OM}=x$، متغیر است (شکل ۲۷) ؛ و بعکس، مقادیرمختلف یك متغیر را می‌توان با نقاط یك محور نشان داد.



شکل ۲۷

۲۱ - بینهایت - می‌گویند متغیر x به سمت بعلاوهٔ بینهایت ($+\infty$) میل می‌کند، هرگاه مقادیرآن رفته رفته بزرگ شود وازهرعدد

مثبت مفروض بزرگتر شود (در این صورت نقطهٔ M به طول OM، x روی نیم‌خط Ox از O فوق‌العاده دور می‌شود) . همچنین می‌گویند متغیر x به سمت منهای بینهایت ($-\infty$) میل می‌کند ، هرگاه علامت آن منفی باشد و قدر مطلقش از هر عدد دلخواه بزرگتر شود (در این صورت نقطهٔ M به طول $x=\overline{OM}$ روی نیم خط Ox' فوق‌العاده از O دور می‌شود) .

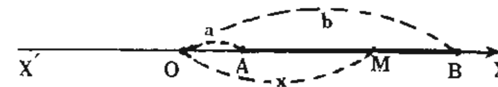
تبصره - باید دانست که علامت $+\infty$ نمایندهٔ یك عدد جبری معینی نیست (حتی یك عدد جبری مشخص بسیار بزرگ) بلکه مقصود از تساوی $x=+\infty$ این است‌که x مثبت و بی‌اندازه بزرگ‌است وهمچنین مقصود از $x=-\infty$ این است که x منفی و قدر مطلق آن فوق‌العاده بزرگ می‌باشد .

۲۲ - فاصله - اگر a و b دو عدد جبری باشند $(a<b)$ ، اصطلاحاً مجموعهٔ اعدادی را که از a و b و اعداد محصور بین a و b تشکیل می‌شود فاصلهٔ a و b می‌نامند وچنین می‌نویسند (a ، b) ؛ اگر x عددی متعلق به فاصلهٔ (a ، b) باشد داریم : $a\leq x\leq b$. فاصلهٔ (a ، $+\infty$) عبارت است از عدد a وکلیهٔ‌اعداد بزرگتر از a $(x\geq a)$. فاصلهٔ ($-\infty$ ، a) عبارت است از عدد a و کلیهٔ اعداد کوچکتر از a $(x\leq a)$.

جمیع اعداد جبری متعلقند به فاصلهٔ ($-\infty$ ، $+\infty$) .

تبصره - اگر A و B (شکل ۲۸) ، دو نقطه از محور x'Ox بطولهای $\overline{OA}=a$ و $\overline{OB}=b$ باشند، وقتی‌که‌می‌گوییم x متعلق به‌فاصلهٔ (a ، b) است، یعنی نقطهٔ M بطول $\overline{OM}=x$ می‌تواند روی قطعه‌خط

AB حرکت‌کند و حتی بریکی از نقاط A و B منطبق شود بطوری‌که قطعه‌خط AB نمودار هندسی فاصلهٔ (a ، b) است .



شکل ۲۸

۲۳ـ مفهوم تابع ـ فرض کنیم در یکی از روزهای زمستان در ساعات مختلف ، درجهٔ حرارت را اندازه گرفته نتایج زیر را بدست آورده باشیم :

ساعت	درجه	ساعت	درجه
ساعت ۶	−۲°	ساعت ۱۴	+۷°
ساعت ۷	−۲°/۵	ساعت ۱۵	+۶°/۵
ساعت ۸	−۳°	ساعت ۱۶	+۵°/۵
ساعت ۹	−۲°	ساعت ۱۷	+۴°
ساعت ۱۰	صفر درجه	ساعت ۱۸	+۳°
ساعت ۱۱	+۱°/۵	ساعت ۱۹	+۲°/۵
ساعت ۱۲	+۴°	ساعت ۲۰	+۲°
ساعت ۱۳	+۶°	ساعت ۲۱	+۱°

به‌این ترتیب ملاحظه می‌شودکه نظیر هریك ازساعات روز درجهٔ حرارت معینی وجود دارد که بستگی به ساعت اندازه‌گیری حرارت دارد . این مطلب را به این طریق بیان می‌کنندکه :

درجهٔ حرارت در روز با تغییر ساعت اندازه‌گیری تغییر می‌کند

یا درجهٔ حرارت تابعی است از ساعت اندازه‌گیری .

۲۴ـ مثالهای دیگر ـ اولا طول یك میلهٔ فلزی تابعی است از درجهٔ حرارت آن .

ثانیاً طول یك وتر دایره تابعی است ازاندازهٔ کمانی‌که در دو سر با آن مشترك باشد یا تابعی است از فاصلهٔ وتر از مرکز دایره .

ثالثاً قیمت قطعه‌ای از یك پارچه تابعی از طول این قطعه است .

رابعاً فاصلهٔ یك متحرك از مبدأ حرکت تابعی است از مدت حرکت و سرعت حرکت .

۲۵ ـ تعریف ـ می‌گویند عدد y تابعی است ازعدد متغیر x ، وقتی که نظیر هر مقدار x ، مقدار معینی از y وجود داشته باشد .

x را **متغیر مطلق** می‌نامند . x و y می‌توانند اندازهٔ دوکمیت یا اینکه دو عدد مطلق باشند . اگر y مقدار عددی یك عبارت جبری بر حسب x باشد ، می‌گویند y یك **تابع جبری** از x است . مثلا :

$y=2x+3$ و $y=\frac{1}{x+2}$ و $y=\sqrt{x-1}$ هرکدام یك تابع جبری از x هستند . در این صورت با معلوم بودن x مقدار y بسهولت حساب می‌شود . بطور کلی اگر y تابعی از x باشد ، می‌نویسند : $y=f(x)$ (بخوانید y تابعی است از x یا y مساوی است با اِف x) ومقدار تابع $f(x)$ را به ازای $x=\alpha$ به صورت $f(\alpha)$ نمایش می‌دهند .

۲۶ ـ تابعی‌که در یك فاصله معین است ـ مقدار x هرچه باشد، همیشه می‌توان مقدار عددی $y=2x+3$ نظیر آن را حساب کرد . در این صورت می‌گویند که تابع $y=2x+3$ به ازای همهٔ مقادیر x معین است .

و تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ فقط وقتی معین است که مقدار زیر

رادیکال یعنی $1-x^2$ مثبت یا صفر باشد و برای این باید $-1\le x\le 1$ باشد. می‌گویند تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ فقط در فاصلهٔ $(-1 ، +1)$ معین است.

همچنین تابع $\sqrt{x-1}$ فقط وقتی قابل محاسبه است‌که مقدار زیر رادیکال یعنی $x-1$ مثبت یا صفر باشد، یعنی $x\ge 1$ باشد. پس می‌گویندکه تابع $y=\sqrt{x-1}$ درفاصلهٔ $(+1 ، +\infty)$ معین‌است.

۲۷ ـ نمو یك متغیر ـ اگرمتغیر x در ابتدا ۴+ باشد وسپس مقدار ۱۱+ را اختیار کند مقدار آن بقدر $+11-4=+7$ ترقی کرده است. دراین صورت می‌گویند متغیر نموی مساوی ۷+ پیدا کرده واگر ابتدا ۴+ باشد وسپس ۵− شود نموآن $-5-4=-9$ است.

بطورکلی **اگر مقدار متغیر x از مقدار ابتدایی x_1 تامقدار انتهایی x_2 تغییرکند، نموآن مساوی است با x_2-x_1.**

واضح است که نمو مثبت وقتی حاصل می‌شود که مقدار متغیر ترقی کند و در غیر این صورت نمو منفی است. معمولا نمو متغیر را به صورت $\Delta x=x_2-x_1$ می‌نویسند (Δx را دلتا x می‌خوانند).

اگر $y=f(x)$ باشد، وقتی‌که x. از x_1 تا x_2 تغییر می‌کند، نمو تابع عبارت است از: $\Delta y=y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)$

۲۸ ـ صعود و نزول یك تابع ـ اگر درجهٔ حرارت یك میلهٔ فلزی افزایش یابد، طول میله افزایش پیدا می‌کند واگر درجهٔ حرارت نقصان یابد، از طول میله‌کاسته می‌شود. در این صورت می‌گویند که طول میله یك تابع صعودی از درجهٔ حرارت آن است.

طول وتری ازیك دایره وقتی‌که فاصلهٔ آن از مرکز افزایش پیدا

کندکوچك می‌شود و برعکس. در این صورت می‌گویند که طول وتر، یك تابع نزولی ازفاصلهٔآن تا مرکز دایره است.

تعریف ـ اگر وقتی متغیر x ترقی می‌کند، تابع $y=f(x)$ نیز ترقی کند، می‌گویند تابع **y صعودی** است.

اما اگر وقتی متغیر x ترقی می‌کند، تابع y تنزل کند، می‌گویند تابع **y نزولی** است.

به عبارت دیگر، **تابع را در صورتی صعودی می‌گویند که جهت تغییرات آن با جهت تغییرات متغیر یکی باشد. و تابع را نزولی می‌نامند هرگاه جهت تغییرات آن با جهت تغییرات متغیر یکی نباشد.**

مقصود از مطالعهٔ تغییرات تابع $f(x)$ این است که تعیین‌کنیم به ازای چه مقادیری از x تابع صعودی است و به‌ازای چه مقادیردیگری نزولی می‌باشد. بسا ممکن است‌که مقدارتابع مستقل ازمقدار x باشد؛ در این صورت می‌گویند که تابع ثابت است. مثلا تابع $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ ثابت است و اگر x مثبت باشد مساوی ۱+ و اگر x منفی باشد مساوی ۱− است.

۲۹ـ مطالعهٔ تغییرات یك تابع ـ تابع $y=f(x)$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم‌که این تابع در فاصلهٔ $(a ، b)$ معین باشد. دو مقدار x_1 و x_2 از این فاصله را درنظر می‌گیریم و مقادیر نظیر این دو مقدار را برای تابع $f(x)$ بترتیب y_1 و y_2 می‌نامیم. نظر به‌آنچه در شمارهٔ قبل‌گفتیم، درصورتی‌که تابع $f(x)$ صعودی باشد:

اگر x_2-x_1 مثبت باشد، y_2-y_1 هم مثبت است.

اگر $x_2 - x_1$ منفی باشد، $y_2 - y_1$ هم منفی است .

اما درصورتی‌که تابع $f(x)$ نزولی باشد :

اگر $x_2 - x_1$ مثبت باشد، $y_2 - y_1$ منفی است .

اگر $x_2 - x_1$ منفی باشد، $y_2 - y_1$ مثبت است .

اگر نسبت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ مثبت‌باشد، تابع درفاصلهٔ (a ، b) صعودی است .

و اگر نسبت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ منفی باشد ، تابع در فاصلهٔ مزبور نزولی است .

و از این رو ، قاعدهٔ زیر بدست می‌آید :

برای مطالعه درتغییرات تابع $f(x)$ ،کافی‌است که نسبت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ یعنی $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ را حساب کنیم ؛ در هر فاصله که این نسبت مثبت باشد، تابع صعودی است وهرجا که این نسبت منفی باشد، تابع نزولی‌است .

مثال ـ مطالعه درتغییرات تابع $y = x^2$

دراین مثال $f(x) = x^2$ و نسبت مفروض چنین نوشته می‌شود :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$$

واضح‌است‌که اگر x_1 و x_2 هردومثبت باشند، $x_1 + x_2$ مثبت‌است

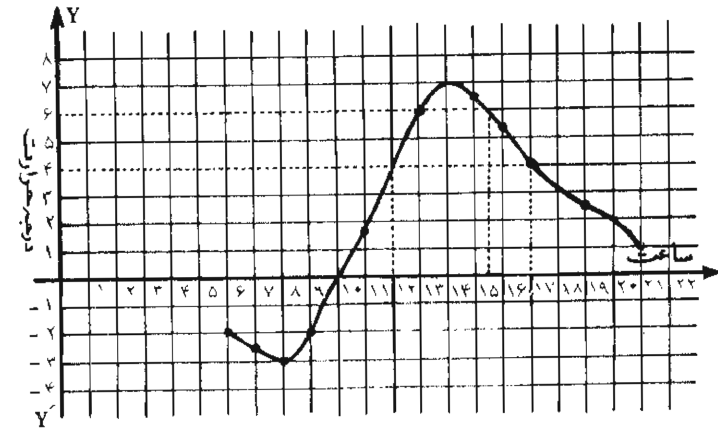
واگر x_1 و x_2 هردومنفی باشند، $x_1 + x_2$ منفی‌است؛ پس تابع $y = x^2$ وقتی‌که x مثبت باشد، صعودی است واگر x منفی باشد ، نزولی است .

مطالب فوق را درجدول زیر خلاصه می‌کنند:

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$y = x^2$	$+\infty$	↘	۰	↗	$+\infty$

درسطر اول مقادیر مهم x را از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌نویسند و در سطر دوم مقادیر y نظیر آنها را می‌نویسند . سهم به طرف پایین، نشان می‌دهدکه‌تابع در فاصلهٔ (۰ ، $-\infty$) نزولی است و سهم به طرف بالا ، علامت این است‌که تابع درفاصلهٔ ($+\infty$ ، ۰) صعودی است .

۳۰ ـ نمودار حرارت روزانه ـ جدول‌شمارهٔ۲۳دربارهٔحرارت روزانه را بار دیگر درنظر می‌گیریم و دو محور عمود برهم مختصات را رسم می‌کنیم و اولین اندازه‌گیری حرارت (ساعت ۶ و ۲°ـــ) را به وسیلهٔ نقطهٔ (۶=x و ۲ــ=y) نمایش می‌دهیم و سپس مقدار دوم (ساعت۷ و ۲°/۵ــ) را به وسیلهٔ نقطهٔ (۲/۵ــ=y و ۷=x) نشان می‌دهیم و این کار را برای همهٔ اندازه‌گیریهای مزبور انجام می‌دهیم (شکل ۲۹) . این نقاط همگی روی یك منحنی واقعندکه هرقدر تعداد اندازه‌گیریهای روزانهٔ حرارت را بیشترکنیم مشخص‌تر و واضح‌تر بنظر می‌آید . برای ترسیم این منحنی بطور تقریبی کافی است این نقاط را متوالیاً به وسیلهٔ خط متصلی به هم وصل کنیم . این منحنی را **نمودار**



شکل ۲۹

حرارت روزانه از ساعت ۶ تا ساعت ۲۱ می‌نامند .

این نمودار، تغییر حرارت روزانه را بهتر از جدولی که درشمارهٔ ۲۳ ترتیب دادیم نشان می‌دهد زیرا به‌کمك آن می‌توان تغییرات درجهٔ حرارت را در هرلحظه مشاهده‌کرد .

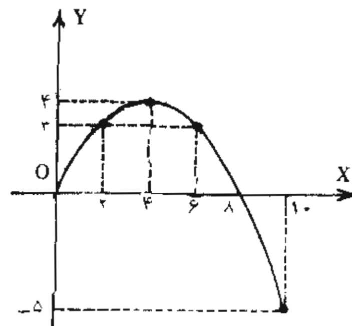
از ساعت ۶ تا ۸ درجهٔ حرارت از −۲° به −۳° تنزل‌کرده و از ساعت ۸ تاساعت ۱۴ از −۳° به +۷° ترقی‌کرده و از ساعت ۱۴ تاساعت ۲۱ از +۷° مجدداً به +۱° تنزل‌کرده‌است . گذشته ازاین، از روی این منحنی می‌توان ملاحظه‌کردکه مثلاً درساعت۱۲درجهٔ حرارت +۴ ودر ساعت ۱۷ نیز +۴ و در ساعت ۱۵ و ۳۰ دقیقه درجهٔ حرارت درحدود ۶ بوده است .

۳۱ ـ منحنی نمایش تغییرات یك تابع ـ همهٔ توابع را می‌توان باروش مشابهی به وسیلهٔ ترسیم مشخص‌کرد .

مثال ـ نمایش هندسی تابع $y=2x-\frac{x^2}{4}$ وقتی که x ازصفر تا +۱۰ تغییر کند ـ به x مقادیر عددی مختلف نسبت می‌دهیم ومقادیر نظیرآنها را برای y حساب می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

x	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰
y	۰	۳	۴	۳	۰	−۵

نقاط (x=۰ و y=۰) و (x=۲ و y=۳) و . . . (شکل ۳۰) را رسم می‌کنیم وسپس‌این‌نقاط را منظماً ومتوالیاً به‌وسیلهٔ منحنی پیوسته‌ای به‌هم وصل می‌کنیم . نمایش هندسی تابع $y=2x-\frac{x^2}{4}$ در فاصلهٔ (+۱۰ و ۰) بدست می‌آید .



شکل ۳۰

نمودارها ، گذشته از اینکه بسهولت‌تغییرات یك تابع‌رامشخص می‌کنند، این مزیت را نیز دارند که در بسیاری موارد می‌توان آنها را به‌وسیلهٔ بعضی آلات ثبات بطور خودکار ترسیم کرد (میزان‌الهوا ، فشارسنج ، دستگاه ثبت سرعت و غیره . . .) و از اینجا اهمیت عملی آنها آشکار می‌شود .

رابطهٔ $y=f(x)$ را معادلهٔ منحنی نمایش $f(x)$ می‌نامند .

ازآنچه گفته شد چنین نتیجه می‌شود :

برای اینکه یك نقطهٔ $M(x_1$ و $y_1)$ روی منحنی $y=f(x)$ واقع باشد ، لازم وکافی است که $y_1=f(x_1)$ باشد .

تمرین

۱ ـ به فنری وزنه‌های مختلفی آویخته افزایش طول فنر را به‌طریق زیر ثبت‌کرده‌اند :

وزن : ۱کیلوگرم ، ۲کیلوگرم ، ۳کیلوگرم ، ۴کیلوگرم ، ۵کیلوگرم ، ۶کیلوگرم .

افزایش‌طول: ۵سانتیمتر ، ۱۰سانتیمتر ، ۱۴سانتیمتر ، ۱۷سانتیمتر ، ۱۹سانتیمتر ، ۲۰سانتیمتر

نمودار نمایش افزایش طول را برحسب وزن رسم‌کنید .

نمایش‌هندسی‌تابعهای زیر را بطور تقریبی رسم کنید :

۲ ـ $y=6x-x^2$ وقتی‌که x از -1 تا $+7$ تغییرکند .

۳ ـ $y=x^2-6x+5$ وقتی‌که x از ۰ تا $+6$ تغییرکند .

۴ ـ $y=\frac{3x}{x+2}$ وقتی‌که x از -1 تا $+8$ تغییرکند .

د ـ تغییرات تابع خطی و نمایش ترسیمی آن

I ـ تغییرات تابع $y=ax$

۳۲ ـ تابع خطی ـ هرتابع را که به‌صورت $y=ax+b$ باشد ، تابع درجهٔ اول یا **تابع خطی** می‌نامند .

a و b اعداد ثابت هستند و x متغیر است .

واضح است‌که **تابع‌خطی به‌ازای جمیع مقادیر x معین‌است.** یعنی‌هرمقدارکه به x بدهیم، یك مقدار نظیرآن‌برای تابع بدست می‌آید . به عبارت دیگرتابع $y=ax+b$ در فاصلهٔ $(-\infty , +\infty)$ معین است .

مانند : $y=3x+2$ و $y=2x+1$ و $y=-x-4$.

اگر ضریب b صفر باشد، تابع به‌صورت سادهٔ $y=ax$ در می‌آید که ابتدا آن را مطالعه می‌کنیم .

۳۳ ـ تغییرات تابع $y=ax$ ـ مثال ۱ ـ تابع $y=3x$ ،متغیر x هرچه باشد این تابع همیشه معین‌است. به x اعداد مختلف، به‌ترتیب صعودی نسبت می‌دهیم و y را حساب می‌کنیم :

x	−۴	−۲	۰	۱	۳	۵
y	−۱۲	−۶	۰	۳	۹	۱۵

ملاحظه می‌شودکه y نیز مرتباً ترقی می‌کند .

مثال ۲ ـ تابع $y=-2x$ ؛ این تابع نیز به ازای همهٔ مقادیر x معین است و داریم :

x	−۵	−۳	۰	۱	۴	۶
y	+۱۰	۶	۰	−۲	−۸	−۱۲

اما ملاحظه می‌شود که این بار چون x صعود می‌کند ، y تنزل می‌کند .

۳۴ ـ قضیه ـ اگر a مثبت باشد ، تابع $y=ax$ صعودی است و اگر a منفی باشد ، تابع مزبور نزولی است .

فرض‌کنیم x_1 و x_2 دو مقدار اختیاری از x باشند و y_1 و y_2 مقادیر نظیر آنها از y باشند و $x_1<x_2$ باشد . طرفین را در a ضرب می‌کنیم ، در این صورت :

اولاً a اگر مثبت باشد، خواهیم‌داشت: $ax_1 < ax_2$ یا $y_1 < y_2$
پس تابع صعودی است .

ثانیاً a اگرمنفی باشد ،خواهیم داشت: $ax_1 > ax_2$ یا $y_1 > y_2$
و تابع نزولی است .

ملاحظات ـ اولاً به ازای $x=0$ داریم $y=0$ ، ثانیاً ، علامت y همان علامت x یا مخالف باآن است برحسب اینکه a مثبت یامنفی باشد . ثالثاً اگر x بینهایت شود ، y بینهایت خواهد شد .

۳۵ـ جدول تغییرات ـ وقتی‌که x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی می‌کند : اگر a مثبت باشد ، تابع $y=ax$ از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی می‌کند واگر a منفی باشد ، تابع y از $+\infty$ تا $-\infty$ تنزل می‌کند.

بنابراین تغییرات تابع $y=ax$ دریکی از دو جدول زیرخلاصه می‌شود :

$a<0$			
x	$-\infty$	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

$a>0$			
x	$-\infty$	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

۳۶ـ تعمیم ـ می‌توان‌گفت‌که اگر a مثبت باشد ، تغییرات تابع $y=ax$ در جهت تغییرات x است واگر a منفی باشد ، درخلاف جهت آن است .

بطورکلی **تابع $y=a\times f(x)$ که درآن a عدد ثابتی‌است ، وقتی‌که a مثبت باشد ، تغییراتش با تغییرات $y=f(x)$ متحدالجهت است واگر a منفی باشد ، با آن مختلف‌الجهت می‌باشد .**

در واقع، از نامساوی $f(x_1)<f(x_2)$ درحالتی‌که a مثبت باشد،

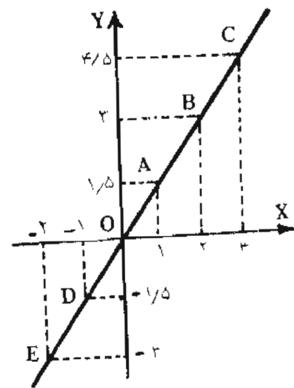
نتیجه می‌شودکه $af(x_1)<af(x_2)$ و درحالتی‌که a منفی‌باشد ، حاصل می‌شودکه $af(x_1)>af(x_2)$. بنابراین به ازای هرافزایش‌مقدار f(x) وقتی‌که a مثبت باشد ، af(x) نیز افزایش می‌یابد و در حالتی که a منفی باشد ، تنزل می‌کند .

۳۷ ـ نمایش هندسی ـ مثال ـ نمایش‌ترسیمی تابع $y=\frac{3}{2}x$.

به x اعداد مختلف داده مقادیر نظیر y را حساب می‌کنیم :

x	۰	۱	۲	۳	−۱	−۲
y	۰	۱/۵	۳	۴/۵	−۱/۵	−۳

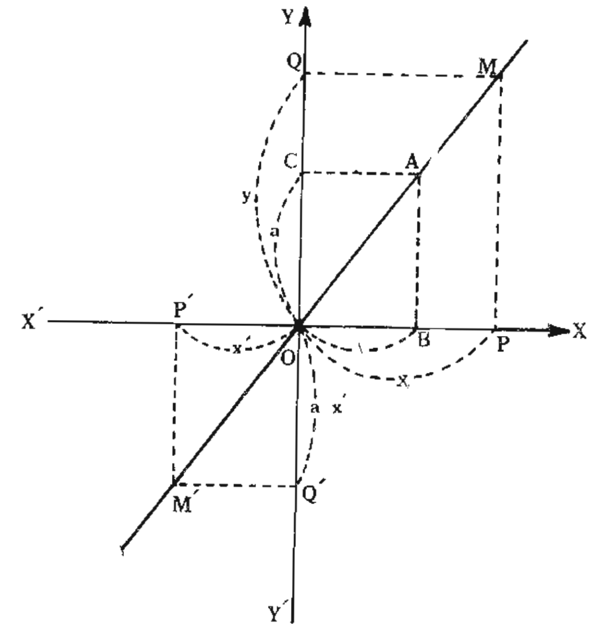
سپس نقاط A (۱ و ۱/۵) ، B (۲ و ۳)، C (۳ و ۴/۵) ، D (−۱ و −۱/۵) وغیره (شکل۳۱) را می‌سازیم و ملاحظه می‌کنیم که همهٔ این نقاط روی یك خط راست که از مبدأ (نظیر $x=0$ و $y=0$) می‌گذرد، واقعند . حال ثابت می‌کنیم‌که این نتیجه کلی است :



شکل ۳۱

۳۸ ـ قضیه ـ منحنی‌نمایش تابع $y=ax$ خط راستی است که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

برهان ـ به ازای مقدار مخصوص $x=1$ داریم $y=a$.
حال نقطهٔ A به مختصات $\overline{OB}=1$ و $\overline{OC}=a$ را رسم کرده خط OA را وصل می‌کنیم (شکل ۳۲) :



شکل ۳۲

اولا مختصات $x=\overline{OP}$ و $y=\overline{OQ}$ هر نقطهٔ M از خط OA، در رابطهٔ $y=ax$ صدق می‌کنند .

از دو مثلث متشابه OPM و OBA نتیجه می‌شود :

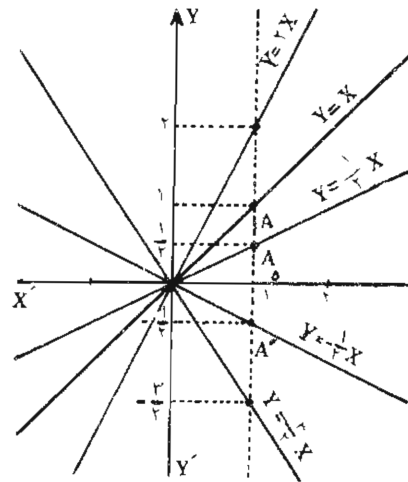
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}$$

و نیز از دو مثلث متشابه OQM و OCA نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} \quad \text{پس} \quad \frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{y}{a}=\frac{x}{1} \quad \text{یا} \quad y=ax$$

ثانیاً بعکس ، هر نقطهٔ به طول x' وبه عرض $y'=ax'$ روی خط OA قرار دارد . فرض کنیم P' نقطه‌ای از محور طولها باشد که طول

آن $\overline{OP'}=x'$ است (شکل۳۲)، طبق آنچه دیدیم، نقطه‌ای ازخط OA که طول آن x' باشد ، عرضش $y'=ax'$ می‌باشد؛ پس نقطهٔ به مختصات (x' و ax') روی خط OA واقع است؛ بنابراین خط OA منحنی نمایش تابع $y=ax$ است .



شکل ۳۳

۳۹ـ ضریب زاویه‌ای یا شیب خط $y=ax$ ـ خط $y=ax$ به وسیلهٔ نقطهٔ O و نقطهٔ A ($x=1$ و $y=a$) مشخص می‌شود . حال به a مقادیر مختلف نسبت داده خطوط متناظر آنها را رسم می‌کنیم (شکل ۳۳) .

اولاـ **اگر a مثبت باشد**، تابع $y=ax$ صعودی‌است وخط نظیر آن در ربع اول وسوم واقع است؛ **و اگر a منفی باشد** ، تابع $y=ax$ نزولی است و خط نظیر آن در ربع دوم و چهارم قرار دارد .

ثانیاً ـ خطهای $y=ax$ و $y=-ax$ نسبت به محورهای مختصات قرینهٔ یکدیگرند . مثلا دوخط $y=\frac{1}{2}x$ و $y=-\frac{1}{2}x$ از این قبیل هستند ، زیرا نقاط A و A' نسبت به محور $x'x$ قرینهٔ یکدیگر هستند ؛ پس $x'x$ و $y'y$ عبارتند از نیمسازهای زوایایی که به وسیلهٔ $OA_\circ$ و OA' تشکیل می‌شود .

ثالثاً ـ وقتی‌که قدرمطلق a افزایش می‌یابد، زاویهٔ xOA بزرگ **می‌شود** ؛ زیرا نقطهٔ (a و ۱) از Ox دور می‌شود. اگر a صفرشود، خط

بر محور $x'x$ منطبق می‌شود و اگر قدر مطلق a خیلی بزرگ شود، خط بتدریج به محور $y'y$ نزدیك می‌شود.

پس می‌توان گفت که وضع خط $y=ax$ یا زاویه‌ای که این خط با محور $x'x$ تشکیل می‌دهد، تابعی است از مقدار جبری ضریب a .

a را ضریب زاویه‌ای یا شیب خط راست $y=ax$ می‌نامند .

تمرین

نمایش هندسی توابع زیر را رسم کنید .

۱ـ $y=3x$ ۲ـ $y=\frac{3}{4}x$ ۳ـ $y=\frac{5}{2}x$

۴ـ $y=-2x$ ۵ـ $y=-\frac{x}{2}$ ۶ـ $y=-\frac{3}{2}x$

۷ـ دوخط $y=\frac{1}{2}x$ و $y=2x$ را رسم کنید . روی اولی نقطهٔ A به طول $\overline{OP}=2$ و روی دومی نقطهٔ B به عرض $\overline{OQ}=2$ را پیدا کرده دو مثلث OPA و OQB را باهم مقایسه‌کرده نتیجه بگیرید‌که این دوخط نسبتَ به‌نیمساز زاویهٔ xOy قرینهٔ یکدیگرند .

۸ـ دو خط $y=3x$ و $y=-\frac{1}{3}x$ را رسم‌کنید و روی خط اولی نقطهٔ M به طول $\overline{OA}=1$ و روی دومی نقطهٔ N بطول $\overline{OB}=3$ را اختیار کنید و دومثلث OAM و OBN را باهم مقایسه‌کرده نتیجه بگیرید‌که این دو خط بر هم عمود هستند .

۹ـ مسئلهٔ ۸ را برای دوخط $y=\frac{3}{4}x$ و $y=-\frac{4}{3}x$ حل‌کنید.

۱۰ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی‌که از مبدأ مختصات و از نقطهٔ $A(x=4 \text{ و } y=6)$ می‌گذرد .

۱۱ـ مسئلهٔ ۱۰ را برای نقطهٔ $A(x=4/5 \text{ و } y=-3)$ حل‌کنید.

II ـ تغییرات تابع $y=ax+b$

۴۰ ـ مطالعهٔ تغییرات ـ مثال ۱ ـ $y=2x+5$: به x مقادیر مختلف بدترتیب صعودی نسبت داده مقادیر y را حساب می‌کنیم:

x	−۴		−۲/۵		−۱		۰		۱		۳
y	−۳	↗	۰	↗	۳	↗	۵	↗	۷	↗	۱۱

چنانکه دیده می‌شود ، y نیز همواره صعودی است .

مثال۲ ـ $y=-2x+3$ ، به همان ترتیب داریم :

x	−۴		۰		۱		۱/۵		۴		۷
y	۱۱	↘	۳	↘	۱	↘	۰	↘	−۵	↘	−۱۱

و چنانکه ملاحظه می‌شود ، y متوالیاً تنزل می‌کند .

۴۱ـ قضیه ـ اگر a مثبت‌باشد ، تابع $y=ax+b$ صعودی است واگر a منفی باشد ، این تابع نزولی است .

فرض کنیم x_1 و x_2 دو مقدار اختیاری x باشند بطوری که $x_1<x_2$ باشد .

اولاً ـ **اگر a مثبت باشد** ، از نامساوی فوق نتیجه می‌شود :

$$ax_1<ax_2 \text{ پس } ax_1+b<ax_2+b$$

یعنی تابع مفروض صعودی است .

ثانیاً ـ **اگر a منفی باشد** ، خواهیم داشت :

$$ax_1>ax_2 \quad \text{پس} \quad ax_1+b>ax_2+b$$

یعنی $y_1>y_2$ و تابع مفروض نزولی است .

تبصره ـ اولا اگر $x=0$ باشد ، خواهیم داشت $y=b$.

ثانیاً وقتی $y=0$ است که $ax+b=0$ باشد، یعنی $x=-\frac{b}{a}$.

ثالثاً اگر x بینهایت باشد، حاصل ضرب ax و مجموع $ax+b$ نیز بینهایت است؛ پس وقتی که x بینهایت باشد، y نیز بینهایت است .

۴۲ـ جدول تغییرات ـ نتایج فوق در جدولهای زیر خلاصه شده اند :

$a<0$	x	$-\infty$		$+\infty$
	y	$+\infty$	↘	$-\infty$

$a>0$	x	$-\infty$		$+\infty$
	y	$-\infty$	↗	$+\infty$

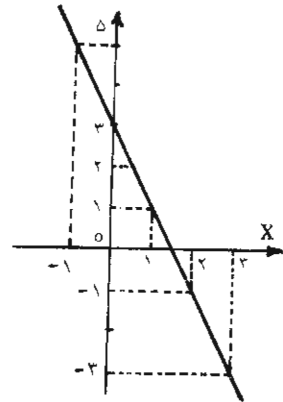
تبصره ـ اگر $a=0$ باشد ، تابع تبدیل می‌شود به $y=b$ پس مقدار y ثابت و مستقل از x است .

۴۳ ـ تعمیم ـ بطوری که ملاحظه می‌شود ، دو جدول فوق مثل جدولهایی هستند که در شمارهٔ ۳۵ رسم کرده‌ایم یعنی تغییرات تابع $y=ax+b$ در همان جهت تغییرات تابع $y=ax$ است . بطور کلی، **تابع $y=f(x)+b$ (که در آن b یك عدد ثابت است) در همان جهت تغییر می‌کند که تابع $y=f(x)$ تغییر می‌کند .**

این مطلب از اینجا نتیجه می‌شود که از نامساویهای $f(x_1)<f(x_2)$ نامساوی $f(x_1)+b<f(x_2)+b$ بدست می‌آید . از طرف دیگر واضح است که هر نموی که به تابع $f(x)$ داده شود، برای تابع $y=f(x)+b$ نیز همان نمو حاصل می‌شود .

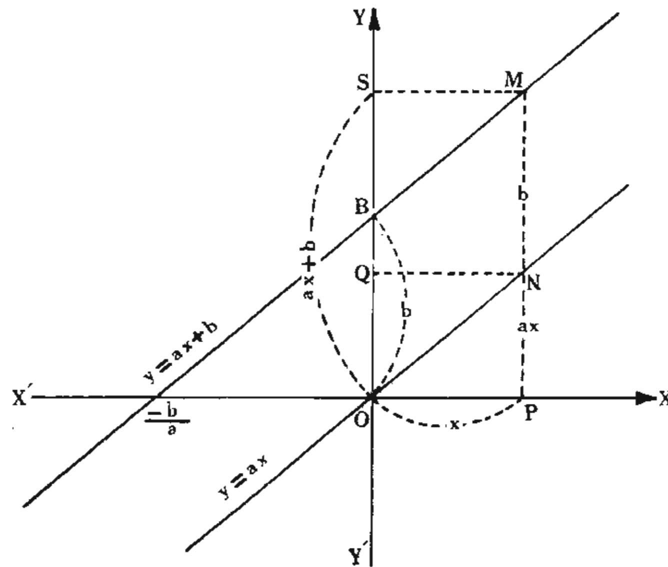
۴۴ـ نمایش هندسی ـ مثال ـ نمایش هندسی تابع $y=-2x+3$:
به x مقادیر مختلف ۱- ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، و . . . را نسبت می‌دهیم .

برای y مرتباً مقادیر ۵ ، ۳ ، ۱ ، ۱- و ۳- حاصل می‌شود . نقاط (۵و۱-) و (۳و۰) وغیره (شکل ۳۴) را رسم و ملاحظه می‌کنیم که همهٔ این نقاط، روی یك خط راست واقع هستند . این مطلب عمومی است .



شکل ۳۴

۴۵ ـ قضیه ـ منحنی نمایش تابع $y=ax+b$ یك خط راست است که با خط $y=ax$ موازی می‌باشد و محور $y'y$ را در نقطه‌ای به‌عرض b قطع می‌کند.



شکل ۳۵

برهان ـ فرض می‌کنیم خط $y=ax$ رسم شده باشد (شکل ۳۵)

و M نقطه‌ای به طول $\overline{OP}=x$ و به عرض $\overline{PM}=ax+b$ باشد و نقطهٔ تلاقی PM را با خط $y=ax$ نقطهٔ N می‌نامیم . پس داریم $\overline{PN}=ax$ و از قضیهٔ شال نتیجه می‌شود :

$$\overline{NM}=\overline{PM}-\overline{PN}=ax+b-ax=b$$

اگر B نقطه‌ای ازمحور $y'y$ باشدکه عرض‌آن b است، دوقطعه‌خط OB و NM متوازی و متساوی و متحدالجهت هستند وچهارضلعی OBMN متوازی‌الاضلاع است ؛ وقتی‌که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ، نقطهٔ N خط $y=ax$ را طی می‌کند و نقطهٔ M خطی را طی می‌کند که از B به موازات این خط رسم شود .

پس نمایش هندسی تابع $y=ax+b$ یك خط راست است .

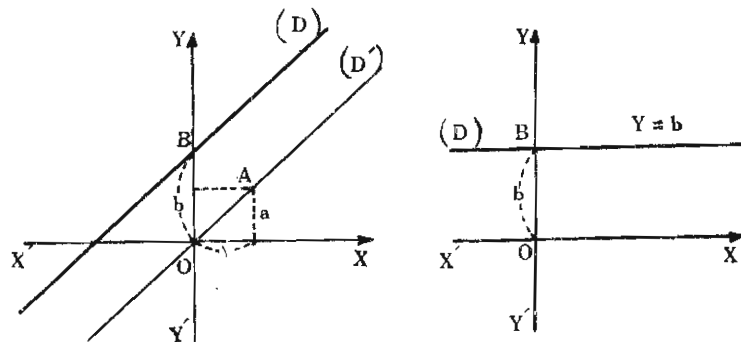
بەهمین دلیل‌است‌که تابع $y=ax+b$ را **تابع خطی** می‌نامند.

بازهم ضریب a که میل خط را نسبت به محورها مشخص می‌سازد ، ضریب زاویه‌ای یا شیب خط نامیده می‌شود .

عدد b که عرض نقطهٔ به طول $x=0$ می‌باشد ، **عرض ازمبدأ** نام دارد .

نقطهٔ تلاقی خط $y=ax+b$ بامحور xها نقطه‌ای است‌که برای آن $y=0$ است . پس $ax+b=0$ یا $x=-\frac{b}{a}$ می‌باشد .

۴۶ ـ عکس‌قضیهٔ ۴۵ ـ هر خط (D) غیر موازی با Oy ، این محور را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند که عرض آن را b می‌نامیم (شکل ۳۶) . از مبدأ مختصات خط (D′) را به موازات D رسم می‌کنیم و نقطه‌ای ازخط اخیر را که طول‌آن ۱+ است ، A می‌نامیم وعرض این نقطه را a فرض می‌کنیم ، خط نمایش معادلهٔ $y=ax$ بر



شکل ۳۶

خط (D′) منطبق است و بنابراین، خط نمایش معادلهٔ $y=ax+b$ بر خط راست (D) منطبق است . پس :

بەازای هر خط راست (D) از صفحه که با محور Oy موازی نباشد ، یك رابطه به صورت $y=ax+b$ موجود است که معادلهٔ خط (D) نامیده می‌شود .

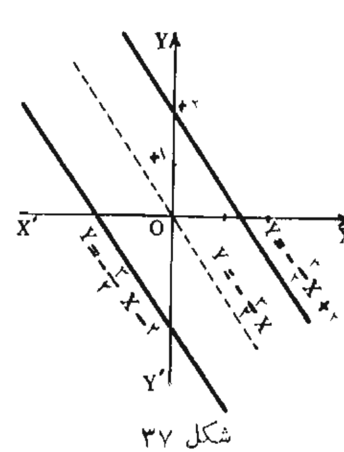
اگر $a=0$ باشد ، داریم $y=b$ ونمایش‌هندسی این معادله خط راستی است که با $x'x$ موازی است (شکل ۳۶) .

۴۷ـ ترسیم خط $y=ax+b$: کافی است‌که دو نقطه از این خط را معین‌کنیم تا بتوان خط راست را رسم‌کرد . اگر b مخالف صفر باشد ، همواره می‌توان نقاط تلاقی خط با محورها را به جای دو نقطهٔ اختیاری مزبور معین‌کرد .

$(x=0$ و $y=b)$ و $(y=0$ و $x=-\frac{b}{a})$ (شکل۳۵) . با این

حال‌اگر دونقطهٔ مزبورخیلی نزدیك به هم باشند ، شایسته است‌که لااقل یك نقطهٔ دیگر از خط را معین کنیم . برای این کار بهتر است که

بزرگترین مقداری را به x نسبت دهیم که درحدود شکل جا می‌گیرد .



شکل ۳۷

شکل ۳۸

شکلهای ۳۷ و ۳۸ مثالهای مختلف از ترسیم خطوط راست را ، برحسب اینکه ضریب زاویه‌ای خط مثبت یا منفی باشد، نشان می‌دهند. از ملاحظهٔ این شکلها و از آنچه قبلا گفتیم ، چنین نتیجه می‌شود :

برای اینکه دو خط متوازی باشند ، لازم وکافی است که ضریبهای زاویه‌ای آنها متساوی باشند .

تمرین

تغییرات توابع زیر را تعیین و منحنی نمایش آنها را رسم کنید :

۱ - $y=2x-3$ ۲ - $y=-x+4$

۳ - $y=-2x-1$ ۴ - $y=\frac{x}{2}+1$

۵ - $y=-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$ ۶ - $y=\frac{2x}{3}-1$

۷- $y=\frac{4x}{3}+2$ ۸- $y=\frac{5}{2}x-3$

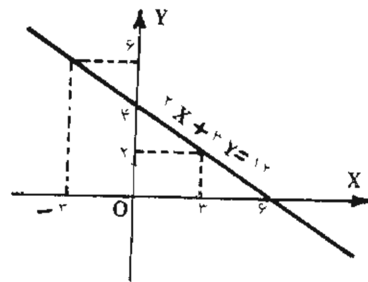
۹- $y=-\frac{2}{3}x+2$

ه ـ معادلهٔ خط راست ومسائل مربوط به آن

I ـ نمایش هندسی معادلهٔ دو مجهولی $ax+by=c$

۴۸ـ مثال ـ فرض کنیم که می‌خواهیم نقاطی را پیدا کنیم که مختصات آنها x و y در معادلهٔ $2x+3y=12$ صدق کنند. برای این کار معادلهٔ مزبور را نسبت به y حل می‌کنیم :

$$y=-\frac{2}{3}x+4$$



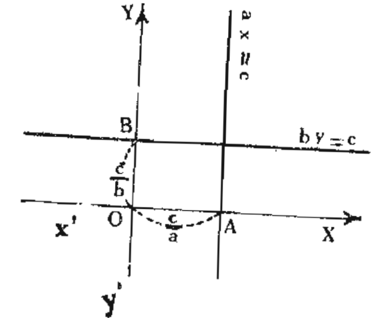
شکل ۳۹

بنابراین نقاط مطلوب نقاطی هستندکه روی خط $y=-\frac{2}{3}x+4$ (شکل۳۹) واقعند واین خط را با تعیین دو نقطهٔ آن ($y=2$ و $x=3$) و ($y=6$ و $x=-3$) یا به وسیلهٔ تعیین نقاط تلاقی آن با محورها ($y=0$ و $x=6$) و ($y=4$ و $x=0$) رسم می‌کنیم .

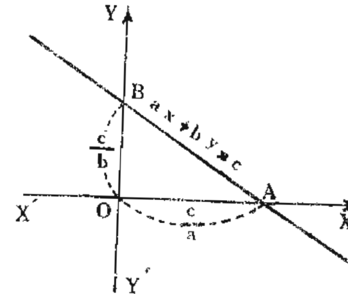
۴۹ ـ قضیه ـ نمایش هندسی معادلهٔ $ax+by=c$ یك خط راست است .

اولا اگر $b\neq 0$ باشد ، معادله به صورت $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ نوشته می‌شود و نمایش آن ، خطی است با ضریب زاویه‌ای $-\frac{a}{b}$ که

محورهای مختصات را در نقاط $A(x=\frac{c}{a}$ و $y=0)$ و $B(x=0$ و $y=\frac{c}{b})$ قطع می‌کنند (شکل ۴۰).



شکل ۴۱



شکل ۴۰

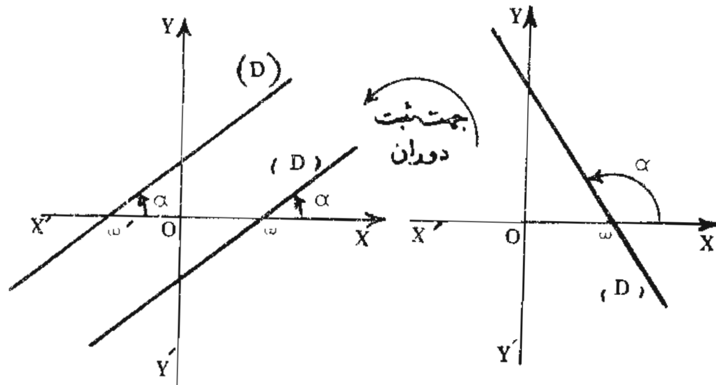
ثانیاً اگر $a=0$ باشد، معادله به صورت $by=c$ یا $y=\frac{c}{b}$ در می‌آید. اگر روی محور $y'y$ نقطه‌ای به عرض $\frac{c}{b}$ اختیار و از آن نقطه خط راستی به موازات $x'x$ رسم کنیم (شکل ۴۱)، هر نقطه که روی این خط واقع باشد، عرضش $\frac{c}{b}$ است و برعکس هر نقطه که عرضش $\frac{c}{b}$ باشد، روی این خط راست واقع است. پس خط راست مزبور نمایش هندسی $y=\frac{c}{b}$ است.

ثالثاً اگر $b=0$ باشد، معادله به صورت $ax=c$ یا $x=\frac{c}{a}$ در می‌آید و مانند قسمت ثانیاً معلوم می‌شود که نمایش هندسی معادلهٔ $x=\frac{c}{a}$ خط راستی است که با محور $y'y$ موازی است و طول جمیع

نقاط آن $\frac{c}{a}$ است (شکل ۴۱).

II ـ ضریب زاویه‌ای خط راست

۵۰ ـ تعریف ـ هر خط مانند D که با محور $x'x$ موازی یا برآن منطبق نباشد، آن را در نقطه‌ای مثل ω قطع می‌کند. زاویهٔ α که باید به‌اندازهٔ آن، محور $x'Ox$ را در حول ω در جهت مثبت[1] دوران



شکل ۴۲

دهیم تا بر D منطبق شود، **زاویهٔ خط** D با محور $x'x$ نامیده می‌شود (شکل ۴۲).

۵۱ ـ قضیه ـ ضریب زاویه‌ای خط $y=ax+b$ یعنی عدد جبری a مساوی است با تانژانت زاویهٔ خط با محور $x'x$.[2]

۱ــ در صفحهٔ مختصات، جهت مثبت دوران، جهتی است که باید در آن جهت نیم‌خط Ox را به اندازهٔ 90° در حول نقطهٔ O دوران دهیم تا برنیم‌خط Oy منطبق شود.

۲ــ این قضیه فقط در صورتی صحت دارد که طول وعرض نقاط، روی دو محور، با یك واحد مشترك سنجیده شده باشند.

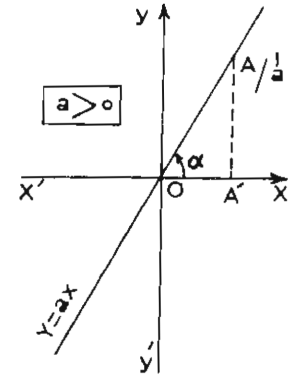
برهان ـ بنابر آنچه گذشت، اگر قضیه را برای خط $y=ax$ ثابت کنیم، برای خط $y=ax+b$ نیز ثابت است.

دیدیم که برای ترسیم خط $y=ax$، کافی است که مبدأ مختصات را به نقطهٔ A (۱ و a) وصل کنیم، حال برحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد، دوحالت تمیز می‌دهیم.

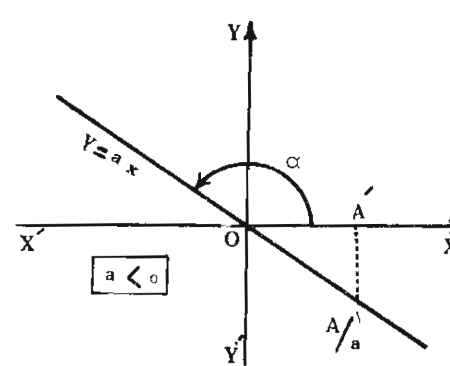
حالت اول ـ $a>0$: در این صورت، نقطهٔ A درناحیهٔ I واقع و زاویهٔ α حاده و تانژانت آن مثبت است و بآسانی از روی شکل ۴۳ دیده می‌شود:

$$tg\alpha = \frac{\overline{A'A}}{\overline{OA'}} = \frac{a}{1} = a$$

حالت دوم ـ $a<0$: دراین‌صورت، نقطهٔ A(۱ و a) درناحیهٔ IV واقع است و زاویهٔ α منفرجه و تانژانت آن منفی است و بعلاوه $\overline{AA'} = -a$ می‌باشد (چرا؟). و از روی شکل ۴۴ دیده می‌شودکه:



شکل ۴۳



شکل ۴۴

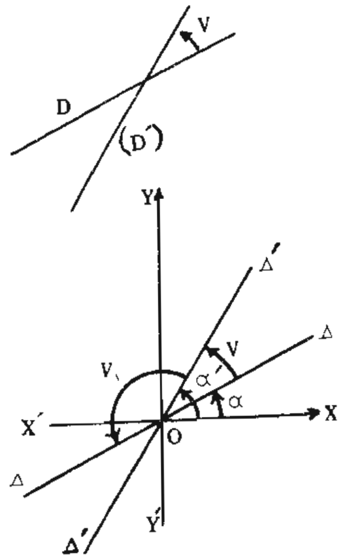
$$tg\alpha = -tg\widehat{AOA'} = -\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = -\overline{AA'} = -(-a) = a$$

۵۲ ـ زاویهٔ دو خط ـ می‌دانیم که از تقاطع دوخط راست، چهار زاویه پدید می‌آید که دو بدو با هم مساوی (زوایای متقابل به رأس) یا مکمل یکدیگر (زوایای مجاور) هستند؛ درحالت کلی از این چهارزاویه دو زاویه حاده ودوزاویه منفرجه می‌باشد؛ ونیز می‌دانیم که ضریب زاویه‌ای هرخط، مساوی است با ضریب زاویه‌ای خطی که از مبدأ مختصات به موازات آن رسم شود و زوایای حادهٔ (یا منفرجهٔ) دو خط، برابرند با زوایای حادهٔ (یا منفرجهٔ) دو خط دیگر که از یك نقطه به موازات آن دو خط رسم شود.

حال فرض می‌کنیم که ضریبهای زاویه‌ای دو خط D و D' معلوم و بترتیب عبارت باشند از m و m'؛ می‌خواهیم تانژانت یکی از زوایایی را که دو خط D و D' تشکیل می‌دهند، حساب کنیم.

از مبدأ مختصات دو خط Δ و Δ' را بترتیب به موازات D و D' رسم می‌کنیم (شکل ۴۵).

اگر α و α' زوایای محدبی باشندکه باید Ox را باندازهٔ آنها



شکل ۴۵

حول O در جهت مثبت دوران داد تا بترتیب بر Δ و Δ' منطبق شوند ، بنابر آنچه‌گذشت ، داریم :

$$tg\alpha' = m' \quad \text{و} \quad tg\alpha = m$$

حال بفرض اینکه $\alpha' > \alpha$ باشد ، یکی از زوایای دو خط Δ و Δ' که آن را V می‌نامیم ، عبارت است از زاویهٔ :

$$V = \alpha' - \alpha$$

پس :

$$tgV = tg(\alpha' - \alpha) = \frac{tg\alpha' - tg\alpha}{1 + tg\alpha' tg\alpha} = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

اگر زاویهٔ V حاده باشد ، tgV مثبت است ؛ اما اگر زاویهٔ V منفرجه باشد ، tgV منفی است و در این حالت زاویهٔ حادهٔ دوخط، مکمل V می‌باشد و تانژانت آن مساوی است با $-tgV$ ، پس اگر در حالت کلی زاویهٔ حادهٔ دوخط D و D' را $(\widehat{D \text{ و } D'})$ بنامیم، درهرحال خواهیم داشت :

$$tg(\widehat{D \text{ و } D'}) = \left| \frac{m' - m}{1 + mm'} \right| \qquad (\widehat{D \text{ و } D'}) < \frac{\pi}{2}$$

۵۳ ـ شرط موازی بودن دوخط ـ بنابر آنچه گذشت، برای آنکه دوخط D و D' با ضریبهای زاویه‌ای m و m' با یکدیگر موازی باشند، شرط این است که $(\widehat{D \text{ و } D'}) = 0$ ، یعنی $m = m'$ باشد .

اگر معادلات دوخط D و D' به صورت :

$$a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{و} \quad ax + by + c = 0$$

باشند ، شرط متوازی بودن آنها این است :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{یا} \quad ab' = a'b$$

(زیرا ضریبهای زاویه‌ای این دوخط عبارتند از $-\frac{a}{b}$ و $-\frac{a'}{b'}$)

۵۴ـ شرط عمود بودن دوخط ـ اگر دوخط D و D' با ضریبهای زاویه‌ای m و m' بر هم عمود باشند ، هر یك از زوایای آنها برابر با $\frac{\pi}{2}$ است و لذا $tgV = \infty$ ، و این در صورتی است که مخرج کسر $\frac{m' - m}{1 + mm'}$ صفر باشد، یعنی $1 + mm' = 0$ یا $mm' = -1$. از آنجا: $m = -\frac{1}{m'}$ ، پس :

شرط اینکه دو خط برهم عمود باشند این است که حاصل ضرب ضریبهای زاویه‌ای آنها مساوی با ۱ـ باشد .

تمرین

هردسته ازخطهای راست زیر را رسم کنید و وضع نسبی آنها را تعیین کنید :

۱ـ	$y = 3x + 2$	$y = -3x + 2$
۲ـ	$y = -3x - 1$	$y = -3x + 5$
۳ـ	$y = -2x + 1$	$y = 2x - 1$
۴ـ	$y = -3x - 3$	$y = \frac{x}{3} + 1$
۵ـ	$y = 5x + 2$	$y = -\frac{x}{5} + 7$

۶- $۳x+۲y=۵$ $\qquad$ $۴y+۶x=۱۱$

۷- $x+۳y=۲$ $\qquad$ $۳x-y=۵$

III ـ مسائل مربوط به‌خط راست

۵۵ـ صورت کلی معادلهٔ خطوطی که از یك نقطه به‌مختصات معلوم می‌گذرندـ واضح است که از یك نقطهٔ معلوم $M(x_۱ \text{ و } y_۱)$ خطوط بیشماری می‌گذرد که دارای راستاهای مختلف و بنابراین دارای ضریبهای زاویه‌ای متفاوت می‌باشند. اگر ضریب زاویه‌ای یکی ازاین خطوط را m بنامیم، معادلهٔ آن به صورت $y=mx+k$ (۱) می‌باشد وباید k را طوری تعیین کرد که خط (۱) از نقطهٔ $M(x_۱ \text{ و } y_۱)$ بگذرد.

حال گوییم برای آنکه خط (۱) از نقطهٔ M بگذرد، باید مختصات M در معادلهٔ (۱) صدق کند، یعنی: $\quad y_۱=mx_۱+k$

واز آنجا: $\quad k=y_۱-mx_۱$

چون این مقدار k را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، صورت کلی معادلهٔ خطوط مارّ بر نقطهٔ M بدست می‌آید: $y=mx+y_۱-mx_۱$

یا
$$\boxed{y-y_۱=m(x-x_۱)} \qquad (۲)$$

اگر در این معادله به m مقادیر مختلف نسبت دهیم، معادلات خطوطی بدست می‌آید که همه از نقطهٔ $M(x_۱ \text{ و } y_۱)$ می‌گذرند.

می‌توان رابطهٔ (۲) را معادلهٔ خطی دانست که از نقطهٔ معلوم $M(x_۱ \text{ و } y_۱)$ می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای آن، مقدار معلوم و داده شدهٔ

m است.

نتیجه ـ اگر از روی معادلهٔ $y-y_۱=m(x-x_۱)$ مقدار m را استخراج کنیم، حاصل می‌شود $m=\frac{y-y_۱}{x-x_۱}$، یعنی **ضریب زاویه‌ای هر خط راست، برابر است با نسبت تفاضل عرضهای دو نقطهٔ آن به‌تفاضل طولهای همان دو نقطه** (با مراعات ترتیب).

مثال ۱ـ صورت کلی معادلهٔ خطوطی که از نقطهٔ $M(۲ \text{ و } -۳)$ می‌گذرند، عبارت است از: $\quad y+۳=m(x-۲)$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $M(۲ \text{ و } -۳)$ می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای آن برابر -۴ می‌باشد، عبارت است از:

$$y+۳=-۴(x-۲)$$

یا
$$y=-۴x+۵$$

مثال۲ ـ معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $M(-۱ \text{ و } ۲)$ بگذرد و با Ox زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل دهد[1]، چنین است: $(m=tg۴۵°=۱)$

$y-۲=x+۱$ $\quad$ یا $\quad$ $y=x+۳$

۵۶ـ معادلهٔ خطی که‌از دو نقطه به‌مختصات معلوم می‌گذردـ

اگر $A(x_۱ \text{ و } y_۱)$ و $B(x_۲ \text{ و } y_۲)$ دونقطهٔ معلوم باشند، بنابرآنچه گذشت، ضریب زاویه‌ای خط AB عبارت است از: $\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$؛

حال اگر صورت کلی معادلهٔ خطوطی را که از نقطهٔ $A(x_۱ \text{ و } y_۱)$ می‌گذرند بنویسیم: $\quad y-y_۱=m(x-x_۱)$

وضریب زاویه‌ای آن را برابر با $\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ قراردهیم، معادلهٔ خط AB

۱ـ یعنی اگر Ox را به‌اندازهٔ $۴۵°$ درجهت مثبت درحول O دوران دهیم، برخط منطبق یا با آن موازی شود.

بدست می‌آید :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

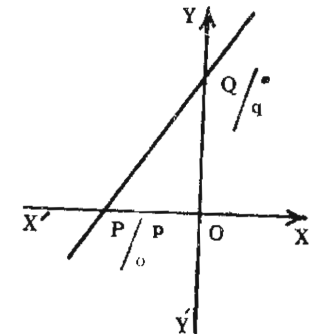
و این معادله را می‌توان به صورت زیر که برای بخاطر سپردن آسانتر است ، نوشت :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حالت مخصوص ـ معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ P (p و ۰) و Q(۰ و q) می‌گذرد، چنین است :

$$y - q = \frac{0-q}{p-0}(x-0)$$

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$



شکل ۴۶

اگر خطی محور $x'x$ را در نقطهٔ P و محور $y'y$ را در نقطهٔ Q قطع کند، $\overline{OP}=p$ را **طول ازمبدأ** و $\overline{OQ}=q$ را **عرض ازمبدأ** آن می‌نامند .

اگرمعادلهٔ خطی بصورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ باشد ، طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q است و برای رسم کردن آن ، روی $x'x$ نقطهٔ P را به طول p و روی $y'y$ نقطهٔ Q را به عرض q تعیین کرده P را به Q وصل می‌کنیم .

مثال ۱ ـ معادلهٔ خط مارّ بر دو نقطهٔ (۳- و ۲) A و (۱ و ۰) B عبارت است از $y+3=\frac{1+3}{0-2}(x-2)$ یا $y=-2x+1$.

مثال ۲ ـ معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن ۱- و عرض ازمبدأ آن ۳ باشد، چنین است : $\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1$ یا $3x-y+3=0$.

۵۷ ـ مسئله ـ مطلوب است معادلهٔ خطی که از نقطهٔ (۱ و ۲-) A بموازات خط $y=3x-2$ رسم شود.

حل ـ صورت کلی معادلهٔ خطوط مارّ بر نقطهٔ A عبارت است از:

$$y-1=m(x+2)$$

وچون خط مطلوب باید با خط $y=3x-2$ موازی باشد، ضریب زاویه‌ای آن یعنی m مساوی است با ۳ و معادلهٔ خط مطلوب چنین است :

$$y-1=3(x+2)$$

یا

$$y=3x+7$$

۵۸ ـ مسئله ـ مطلوب است معادلهٔ خطی که از نقطهٔ (۳- و ۴) B برخط $y=5-2x$ عمود شود.

حل ـ صورت کلی معادلهٔ خطهای مار بر نقطهٔ B عبارت است از :

$$y+3=m(x-4)$$

و چون باید خط مطلوب برخط $y=5-2x$ عمود باشد ، ضریب زاویه‌ای آن عبارت است از $m=\frac{1}{2}$ (عکس ۲- با علامت مخالف) ،

بنابراین، معادلهٔ خط مطلوب چنین است :

$$y+۳=\frac{۱}{۲}(x-۴)$$

یا

$$y=\frac{۱}{۲}x-۵$$

تمرین

مطلوب است تعیین معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ A بگذرد و ضریب زاویه‌ای آن m باشد :

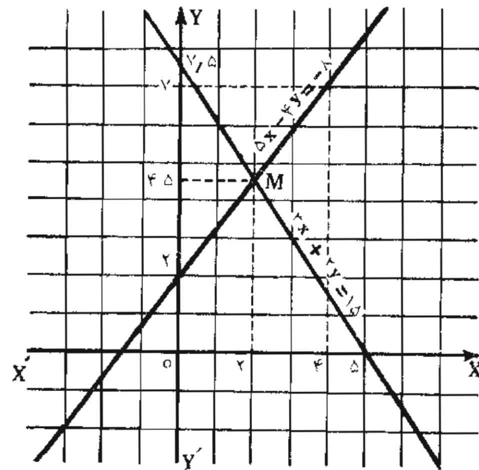
-۱	$A(۱ و -۲)$	$m=۳$
-۲	$A(-۲ و ۳)$	$m=-۲$
-۳	$A(-\frac{۱}{۲} و ۲)$	$m=\sqrt{۲}$
-۴	$A(a و b)$	$m=۱$

مطلوب است تعیین ضریب زاویه‌ای خط راستی که از نقاط A و B می‌گذرد و همچنین مطلوب است تعیین معادلهٔ خط راست AB :

-۵	$A(۱ و -۱)$	$B(۷ و ۲)$
-۶	$A(۱ و ۴)$	$B(۴ و -۲)$
-۷	$A(۳ و ۱)$	$B(۰ و -۵)$
-۸	$A(-۳ و -۱)$	$B(۰ و +۵)$
-۹	$A(۳ و -۲)$	$B(۳ و -۵)$
-۱۰	$A(۴ و -۲)$	$B(۱ و -۴)$

و ـ حل و بحث هندسی دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول ـ فصل مشترک خطوط

۵۹ـ حل ترسیمی دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی ـ مثال ـ دستگاه $\begin{cases}۳x+۲y=۱۵\\ ۵x-۴y=-۸\end{cases}$ را در نظر گرفته خطوطی را که نمایش هر کدام از این معادلات هستند، رسم می‌کنیم؛ این دوخط یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند. مختصات نقطهٔ M در هر دو معادله صدق می‌کند؛ بنا بر این، مختصات مزبور جواب دستگاه مفروض می‌باشند. روی شکل ۴۷ ملاحظه می‌شود که این مختصات، $x=۲$ و $y=۴/۵$ می‌باشد.



شکل ۴۷

به وسیلهٔ محاسبه نیز صحت این نتیجه تحقیق می‌شود. عموماً این طریقهٔ ترسیمی نتایج تقریبی بدست می‌دهد؛ اما برای اینکه صحت محاسبه را با آن تطبیق کنیم، بسیار مفید می‌باشد.

۶۰ـ قضیه ـ مختصات نقطهٔ تلاقی دو خط راست، عبارتند از جواب دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی که از معادلات این خطوط تشکیل

می‌شود .

فرض کنیم‌که معادلات دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ (۱) معادلات دو خط باشند. این‌دوخط می‌توانند متقاطع یا متوازی یا منطبق بریکدیگر باشند .

اولا ـ اگر دو خط مفروض متقاطع باشند ، ضریبهای زاویه‌ای آنها متفاوت است ، پس :

$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$ یا $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ و بالاخره $ab'-ba' \neq 0$ و دو خط مفروض ، فقط یك نقطهٔ مشترك دارند و دستگاه (۱) فقط دارای یك جواب است .

ثانیاً ـ اگر دوخط مفروض متوازی باشند ، ضریبهای زاویه‌ای متساوی هستند ، اما عرض از مبدأ دوخط ، متفاوت است ؛ پس :

$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ و $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ پس $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ یا $ab'-a'b=0$ و $ac'-a'c \neq 0$. در این حالت جواب‌برای دستگاه (۱) غیرممکن‌است.

ثالثاً ـ اگردوخط مفروض برهم منطبق باشند، ضریبهای زاویه‌ای آنها ونیز عرض ازمبدأ آنها متساوی هستند ، پس داریم :

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ و $ac'-a'c=0$ و $ab'-a'b=0$. دستگاه (۱) در این حالت دارای بینهایت جواب یعنی مبهم است .

۶۱ـ فصل مشترك دو منحنی که نسبت به یك دستگاه محورهای مختصات رسم شده باشند ـ مطالبی که در فوق برای تعیین فصل مشترك دو خط راست گفتیم، کلی است و می‌توان‌گفت‌که :

مختصات نقاط تلاقی دو منحنی عبارتند از جوابهای دستگاهی که از ترکیب معادلات دو منحنی حاصل می‌شود. زیرا هرجواب از دستگاه نظیر یك نقطهٔ مشترك است وبعکس، مختصات هر نقطهٔ مشترك، درمعادلهٔ هر دو منحنی صدق می‌کند . به این طریق همواره می‌توان نقاط تلاقی دو منحنی را بدست آورد. اما حل دستگاه حاصل از معادلهٔ دو منحنی عموماً به حل‌معادلات بالاتر از درجهٔ اول، چنانکه خواهیم دید،رجوع می‌شود . ولی‌همواره می‌توان بعکس، دو منحنی را بطور تقریبی‌رسم‌کرده مختصات نقطهٔ تلاقی آنها را بدست‌آورد.

تمرین

دستگاههای معادلات دو مجهولی زیر را به‌طریق ترسیمی حل کنید :

۱ـ $\begin{cases} 3x+2y=17 \\ 5x-y=11 \end{cases}$ ۲ـ $\begin{cases} 6x+4y=-12 \\ 9x+6y=18 \end{cases}$

۳ـ $\begin{cases} 5x+4y=23 \\ 2x-3y=26 \end{cases}$ ۴ـ $\begin{cases} 7x+4y=14 \\ 3x-2y=19 \end{cases}$

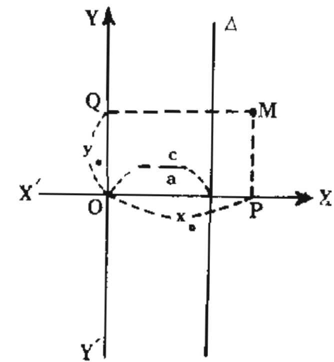
۵ـ $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ 8x+6y=3 \end{cases}$ ۶ـ $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 6x-9y=3 \end{cases}$

ز ـ تعبیر هندسی حل نامعادله‌های یك یا دومجهولی

۶۲ ـ قضیه ـ خط راست $ax+by+c=0$ صفحهٔ دو محور مختصات را به دو ناحیه تقسیم می‌کند . اگر x و y مختصات نقطه‌ای ازیکی

از این دو ناحیه باشد، عبارت $ax+by+c$ صفر نیست و به ازای مختصات جمیع نقاط یکی از این دو ناحیه مثبت و به‌ازای مختصات جمیع نقاط ناحیهٔ دیگرمنفی است .

برهان ــ اولا اگر b صفر باشد، معادلهٔ $ax+c=0$ معادلهٔ خطی است مانند Δ موازی با محور y'y به طول $x=-\frac{c}{a}$. به‌ازای هر نقطهٔ $M(x_0 \text{ و } y_0)$ از صفحه علامت عبارت $ax_0+c=a(x_0+\frac{c}{a})$ موافق یا مخالف علامت a است بر حسب آنکه $x_0+\frac{c}{a}$ مثبت یامنفی باشد، اما اگر M درسمت راست خط Δ واقع باشد، $x_0>-\frac{c}{a}$ و



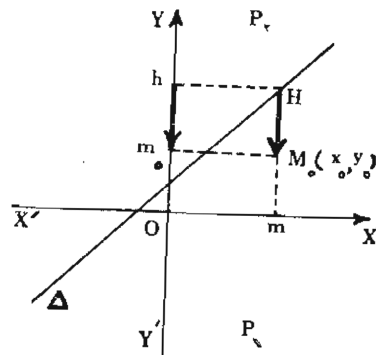
شکل ۴۸

بنا بر این $x_0+\frac{c}{a}$ مثبت است واگر M درسمت‌چپ خط Δ واقع باشد، $x_0<-\frac{c}{a}$ و $x_0+\frac{c}{a}$ منفی است . بنابراین :

به‌ازای مختصات جمیع نقاطی‌که در سمت راست خط Δ واقعند ، علامت عبارت $ax+c$ موافق علامت a است و به‌ازای مختصات جمیع نقاطی‌که درسمت‌چپ Δ واقعند، علامت $ax+c$ مخالف علامت a است.

ثانیاً اگر $b\neq 0$ باشد ، خط $ax+by+c=0$ که آن را Δ

می‌نامیم، محور y'y راقطع‌می‌کند(شکل۴۹). اگر $M_0(x_0 \text{ و } y_0)$ نقطه‌ای ازصفحهٔ دو محورباشد واز نقطهٔ M_0 خطی به‌موازات y'y رسم کنیم، این خط Δ را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند . خط Δ صفحهٔ دو محور را به دو نیم‌صفحهٔ P_1 و P_2 تقسیم‌می‌کند. اگر نقطهٔ M_0 در نیم‌صفحهٔ P_1 واقع باشد ، علامت اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{HM_0}$ روی‌محور y'y یعنی $\overline{hm_0}$ منفی است واگر نقطهٔ M_0 در نیم‌صفحهٔ P_2 واقع‌باشد، علامت $\overline{hm_0}$ مثبت است . حال‌مقدار $\overline{HM_0}=\overline{hm_0}$ را حساب می‌کنیم .



شکل ۴۹

اگر عرض نقطهٔ H را y_1 بنامیم ، داریم :

$$H(x_0=\overline{Om} \text{ و } y_1=\overline{mH}) \text{ و } M_0(x_0=\overline{Om} \text{ و } y_0=\overline{mM_0})$$

و چون نقطهٔ H روی خط Δ واقع است ، مختصات آن در معادلهٔ Δ صدق می‌کند یعنی :

$$ax_0+by_1+c=0$$

و از آنجا :

$$y_1=-\frac{ax_0+c}{b}$$

و چون

$$\overline{HM_0}=\overline{mM_0}-\overline{mH}=y_0-y_1$$

$$\overline{HM_0}=y_0+\frac{ax_0+c}{b}=\frac{ax_0+by_0+c}{b}$$

و می‌توان نوشت :

$$ax_0+by_0+c=b\times\overline{HM_0}$$

از اینجا واضح می‌شود که اگر M_0 در نیم‌صفحهٔ P_2 واقع باشد، چون $\overline{HM_0}$ مثبت است[1]، علامت ax_0+by_0+c همواره همان علامت مقدار ثابت b است واگر M_0 در نیم‌صفحهٔ P_1 واقع باشد، چون $\overline{HM_0}$ منفی است، علامت ax_0+by_0+c مخالف علامت b می‌باشد و قضیه ثابت است.

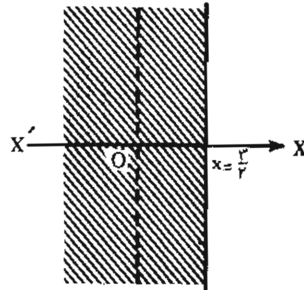
۶۳- موارد استعمال قضیهٔ قبل- برای حل کردن نامعادلهٔ $ax+by+c>0$ کافی است که خط $ax+by+c=0$ را رسم کنیم تا صفحهٔ مختصات به دو ناحیه تقسیم شود و تعیین کنیم که در کدامیك از این دو ناحیه عبارت $ax+by+c$ مثبت است به‌این ترتیب نیم‌صفحه‌ای خواهیم داشت که مختصات هر نقطهٔ آن ریشه‌های نامعادلهٔ مفروض می‌باشند.

مثال ۱- مطلوب است حل نامعادلهٔ $2x-3<0$.

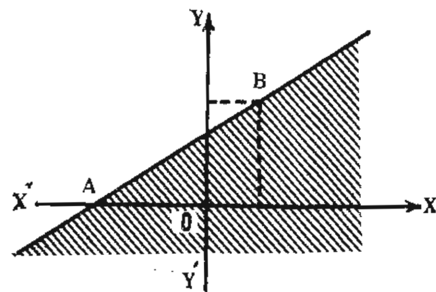
حل - خط به‌معادلهٔ $2x-3=0$ ویا $x=\frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم.
این خط صفحه را به‌دو ناحیه تقسیم می‌کند که یکی از آنها شامل مبدأ مختصات است و چون به‌ازای $x=0$ نامعادلهٔ $2x-3<0$ صحیح است، پس طول جمیع نقاطی که در نیم صفحهٔ هاشور زده واقعند، ریشه‌های نامعادلهٔ مفروض می‌باشند (شکل ۵۰).

مثال ۲- مطلوب‌است‌تعیین‌ریشه‌های نامعادلهٔ $2x-3y+4>0$.
خط به‌معادلهٔ $2x-3y+4=0$ را رسم می‌کنیم، این‌خط صفحه را به

۱- علامت $\overline{HM_0}$ نسبت به‌محور $y'y$ معلوم می‌شود؛ یعنی اگر بردار $\overrightarrow{HM_0}$ با $y'y$ متحدالجهت باشد، $\overline{HM_0}$ مثبت ودرغیراین صورت، منفی است.



شکل ۵۰



شکل ۵۱

دو ناحیه تقسیم می‌کند.

چون به ازای ($x=0$ و $y=0$) مقدار عددی $2x-3y+4$ برابر با ۴ و مثبت است، مختصات هر نقطه از ناحیه‌ای که شامل O (شکل ۵۱) است (ناحیهٔ هاشورزده) ریشه‌های نامعادلهٔ مفروض می‌باشند.

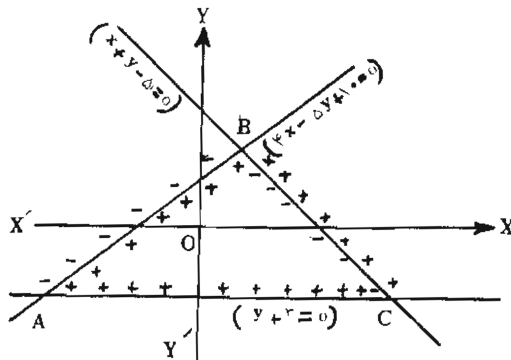
مثال ۳- مطلوب است حل دستگاه نامعادله‌های:

$$\begin{cases} y+3>0 \\ x+y-5<0 \\ 4x-5y+10>0 \end{cases}$$

ابتدا سه خط:

$y+3=0$ و
$x+y-5=0$ و
$4x-5y+10=0$

را رسم و تعیین می‌کنیم که در کدامیك از نواحی حاصل هر یك



شکل ۵۲

از سه نامعادلهٔ مفروض صحیح است و معلوم می‌شود که مختصات جمیع نقاطی که داخل مثلث ABC هستند، ریشه‌های دستگاه نامعادلات مفروض می‌باشند (شکل ۵۲) .

تمرین

مطلوب است تعیین جای نقاطی از صفحهٔ دو محور که مختصات آنها در یکی از نامعادله‌های زیر صدق کنند:

۱- $x+7>0$ ‏ ۲- $y+3<0$

۳- $x+y<0$ ‏ ۴- $3x-y+4>0$

۵- $2x+y<1$ ‏ ۶- $x+7y-3>0$

۷- $2x+3y>7$ ‏ ۸- $3x-7y>0$

نقطهٔ M در کدام ناحیه از صفحهٔ دو محور باید واقع باشد تا مختصات آن در دستگاههای نامعادلات زیر صدق کنند :

۹- $\begin{cases} y+1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$ ‏ ۱۰- $\begin{cases} x+2>0 \\ y+5>0 \end{cases}$

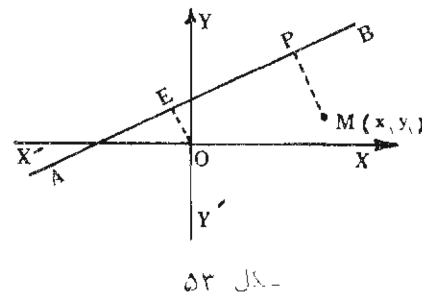
۱۱- $\begin{cases} 2x-1>0 \\ 3y-2<0 \end{cases}$ ‏ ۱۲- $\begin{cases} 2x+y+1>0 \\ 3x+y-1>0 \\ x+y>0 \end{cases}$

۱۳- $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \\ y+1>0 \end{cases}$

ح - فاصلهٔ یك نقطه از یك خط راست

۶۴- مسئله - می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $M(x_1 \text{ و } y_1)$ را از خط راست AB به‌معادلهٔ $y=mx+n$ حساب‌کنیم.

از نقطهٔ M عمود MP را بر خط راست AB فرود می‌آوریم و مختصات نقطهٔ P، یعنی مختصات پای عمود را حساب می‌کنیم . طول قطعه خط MP یعنی فاصلهٔ دو نقطهٔ M و P جواب مسئله است (شکل ۵۳) .



شکل ۵۳

ضریب زاویه‌ای خط راستی که از نقطهٔ $M(x_1 \text{ و } y_1)$ بر خط $y=mx+n$ عمود شود، عبارت است از $-\frac{1}{m}$ و معادلهٔ این خط به صورت زیر می‌باشد :

$$y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$$

مختصات x و y نقطهٔ P عبارت است ازجوابهای دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی زیر :

$$\begin{cases} y=mx+n & (1) \\ y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1) & (2) \end{cases}$$

وفاصلهٔ نقطهٔ M از خط AB یعنی طول عمود MP (با توجه به شمارهٔ ۱۶ فصل دوم) از دستور زیر بدست می‌آید :

$$\overline{MP}^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \qquad (3)$$

برای آنکه این طول را آسانتر حساب کنیم ، از طرفین رابطهٔ (۱) مقدار y_1 را کم می‌کنیم ودرطرف راست آن mx_1 را یك دفعه می‌افزاییم و یك دفعه کم می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$(۴)\qquad y-y_1=m(x-x_1)-(y_1-mx_1-n)$$

اکنون معادلات (۲) و (۴) را برحسب $x-x_1$ و $y-y_1$ حل می‌کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$(۵)\qquad x-x_1=\frac{m(y_1-mx_1-n)}{m^2+1}$$

و

$$(۶)\qquad y-y_1=-\frac{y_1-mx_1-n}{m^2+1}$$

این مقادیر را در رابطهٔ (۳) قرار می‌دهیم معلوم می‌شود :

$$\overline{MP}^2=\frac{(y_1-mx_1-n)^2}{m^2+1}$$

و چون طول MP مثبت است ،

$$(۷)\qquad \boxed{MP=\frac{|y_1-mx_1-n|}{\sqrt{m^2+1}}}$$

حالت خاص ـ اگر نقطهٔ M برمبدأ مختصات منطبق باشد ،

$$MP=OE=\left|\frac{n}{\sqrt{m^2+1}}\right|$$

تبصره ـ اگر معادلهٔ خط راست به صورت $ax+by+c=0$ باشد ، دستور (۷) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\boxed{MP=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

زیرا ضریب زاویه‌ای این خط عبارت است از $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدأ آن

عبارت‌است از $-\frac{c}{b}$ و باید در دستور (۷) به جای m و n این دو مقدار را قرار داد .

مثال ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ از خط راست $4x-3y+15=0$ عبارت است از : $\frac{|4\times1+(-3)\times2+15|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}$ یعنی $\frac{13}{5}$.

تمرین

فاصلهٔ مبدأ مختصات را از هریك ازخطهای راست زیر حساب کنید :

۱ـ $12x+5y-26=0$ ۲ـ $x+y+1=0$

۳ـ $3x-2y-1=0$ ۴ـ $4x+y+5=0$

فاصلهٔ نقطهٔ A را ازخط راست D درهریك ازحالات زیر حساب‌کنید :

	مختصات A	معادلهٔ خط D
۵ـ	(۱ و ۲)	$4x-3y+15=0$
۶ـ	(۲ و ۱)	$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1=0$
۷ـ	(۳ و −۲)	$3x+4y+15=0$
۸ـ	(−۵ و ۳)	$2x-7y+8=0$

مسائل مختلف راجع به‌خط راست

۱ـ مطلوب است تعیین زوایایی‌که دو خط $y=\frac{x}{3}\sqrt{3}+3$ و $y=x\sqrt{3}+3$ با محور Ox تشکیل می‌دهند.

۲ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطوط راستی که از نقطهٔ (۲ و ۰) گذشته با محور Ox زوایای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ می‌سازند و معادلهٔ خطوطی که با آنها موازی باشند ومحور Oy را در نقطه‌ای بعرض ۴ قطع‌کنند وهمچنین تعیین طول نقطهٔ تقاطع دو خط اخیر با محور Ox.

۳ـ ثابت کنید که سه نقطهٔ (۳ و ۱−) ، (۲ و ۳) و (۰ و ۱۱) روی یك خط راست واقعند.

۴ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خط مماس بردایره‌ای که مرکزش مبدأ مختصات و شعاع آن $\sqrt{2}$ باشد، درهریك از دوانتهای قطری‌که با محور Ox زاویهٔ °۴۵ می‌سازد.

۵ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی‌که خط واصل مابین نقطهٔ (۳ و۵) و (۴ و ۴) را نصف‌کرده با محور Ox زاویهٔ °۴۵ می‌سازد.

۶ـ مختصات سه‌رأس یك مثلث عبارت است از (۰ و ۰) ، (۴ و ۲) و (۴ و ۶−) ؛ مطلوب است تعیین معادلات اضلاع مثلث.

۷ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خط راستی‌که از نقطهٔ (۲ و ۲) گذشته مجموع طول‌قطعاتی‌که مابین خط و مبدأ مختصات روی دو محور جدا می‌شود مساوی۹ باشد.

۸ـ تحقیق‌کنید که دو نقطهٔ (۱ و ۱) و (۳ و ۳) در یك طرف خط $x-3y+5=0$ واقعند یا در دوطرف آن.

۹ـ مطلوب است تعیین‌مختصات نقطهٔ تقاطع دوخط : $4x+3y=10$ و $3x+5y=13$.

۱۰ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطوطی که ازنقطهٔ تقاطع دو خط $x-7y+5=0$ و $3x+y-7=0$ به موازات محورهای مختصات رسم شوند.

۱۱ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ Q(۳ و ۲) گذشته با محور Ox زاویهٔ °۴۵ بسازد و تعیین کنید طول قطعه خطی از آن را که

مابین Q ونقطهٔ تقاطع با خط $x+y+1=0$ محصور است.

۱۲ـ معادلهٔ خط واصل مابین دونقطهٔ A(۴ و ۶) و B(۱− و ۷−) را نوشته تعیین کنید نسبت قطعه خطهایی را که به وسیلهٔ خط $y+4x=0$ روی قطعه‌خط AB جدا می‌شوند.

۱۳ـ مطلوب است‌تعیین فاصلهٔ نقطهٔ (a و b) از خط $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

۱۴ـ مطلوب است‌تعیین فاصلهٔ‌نقطهٔ (b و a) از خط $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

۱۵ـ تحقیق‌کنیدکه مبدأ مختصات از خطوط زیر بهیك فاصله است:
$4x+3y+10=0$ و $5x-12y+26=0$ و $7x+24y=50$.

۱۶ـ مطلوب است تعیین مختصات سه رأس مثلثی که معادلات اضلاع آن‌عبارتنداز $7y+x+11=0$ ، $3y-x=1$ و $3x+y=7$ ؛ طول ارتفاعات این مثلث را حساب‌کنید.

۱۷ـ مطلوب است تعیین زاویهٔ مابین دو خط :

$$y-\sqrt{3}x-5=0 \quad \text{و} \quad \sqrt{3}y-x+6=0$$

۱۸ـ مطلوب است تعیین زاویهٔ مابین دوخط :

$$2x-y+1=0 \quad \text{و} \quad 11x-(8+5\sqrt{3})y-5\sqrt{3}=0$$

۱۹ـ مطلوب است تعیین زاویهٔ مابین دوخط :

$$y=mx+b \quad \text{و} \quad (m-1)x-(m+1)y+(m^2-1)b=0$$

۲۰ـ مطلوب است‌تعیین معادلات خطوطی که از نقطهٔ (۳− و ۱−) عمود برخط $x+7y=2$ وموازی با این خط رسم شوند وتعیین‌طول‌قطعه‌ای ازخط اخیر که مابین محورهای مختصات محصور است.

۲۱ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی‌که ازمبدأ مختصات برخط واصل مابین دو نقطهٔ (۶− و ۳) و (۵ و ۴) عمود شود وتعیین طول این عمود.

۲۲ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی‌که از مبدأ مختصات بگذرد و با

خط $x+y\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$ زاویهٔ $60°$ بسازد و تعیین مختصات نقطهٔ تلاقی این دو خط .

۲۳ـ مطلوب است تعیین نقطه‌ای از محور Ox که فاصلهٔ آن از خط $3x+4y=12$ مساوی ۴ باشد .

۲۴ـ مطلوب است تعیین عدد k بقسمی که دو خط $2x+3y=4$ و $2x-ky=2$ برهم عمود یا با یکدیگر موازی باشند.

۲۵ـ مطلوب است تعیین عدد k بقسمی که دو خط $3x+4y=5$ و $4x+ky=3$ برهم عمود بوده یا با یکدیگر موازی باشند.

۲۶ـ مطلوب است تعیین زاویهٔ مابین دو خط $2x-y+7=0$ و $3x+6y-8=0$.

۲۷ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی که نقطهٔ (۱ و ۳) را به نقطهٔ تقاطع دوخط $3x+2y-5=0$ و $4x+3y+7=0$ وصل می‌کند .

۲۸ـ معادلات اضلاع مثلثی عبارتنداز $3x+y=2$ و $x+2y=5$ و $2x-3y+7=0$. مطلوب‌است تعیین مختصات نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع .

۲۹ـ مطلوب است تعیین معادلات خطوطی که از نقطهٔ تقاطع دوخط $7y-x-13=0$ و $3x+4y-11=0$ برخود این دو خط عمود شود ومحاسبهٔ تانژانت زوایای بین این دوخط .

۳۰ـ معادلهٔ $mx+3y-4m+1=0$ مفروض است . ثابت‌کنید که اگر به m مقادیر مختلف نسبت دهیم ، تمام خطوط حاصل از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند .

حل ـ راه اول ـ به m دومقدار مختلف m' و m'' نسبت داده و معادلهٔ دوخط حاصل یعنی : $m'x+3y-4m'+1=0$ و $m''x+3y-4m''+1=0$ را با هم حل می‌کنیم مختصات نقطهٔ تقاطع $y=-\frac{1}{3}$ و $x=4$ است‌که بستگی به‌مقادیر m' و m'' ندارد ، پس‌تمام خطوط مزبور از این نقطهٔ ثابت می‌گذرند .

راه دوم ـ معادلهٔ خط را به صورت $m(x-4)+3y+1=0$ می‌نویسیم . چون‌نقطهٔ مطلوب روی تمام خطوطی‌که به ازای مقادیر m بدست می‌آیند واقع است ، پس به ازای مختصات این‌نقطه، رابطهٔ فوق بهیك اتحاد بر حسب m تبدیل می‌شود. بنابراین باید ضرایب قوای m درطرفین معادله متساوی باشند .

یعنی $x-4=0$ و $3y+1=0$ باشد . یا $x=4$ و $y=-\frac{1}{3}$.

۳۱ـ ثابت‌کنیدکه درهر يك ازمعادلات زیر اگر به m مقادیر مختلف نسبت دهیم، تمام‌خطوط حاصل از نقطهٔ ثابتی‌که مختصات آن‌را حساب می‌کنید مرور می‌کنند :

$$(m+3)x+(5-m)y+1=0$$

$$x(m^2+2)+y(m-1)+m^2+2m=0$$

۳۲ـ سه نقطهٔ A(۲ و ۱−) و B(۳ و ۰) و C(۲a و a−۱) مفروضند. مقدار a را بطریقی تعیین کنید که سه نقطهٔ فوق بر يك خط راست واقع باشند.

۳۳ـ سه خط $y=5x+8$ و $2y=3x+m$ و $3y=4x+m$ مفروضند. m را چنان حساب‌کنیدکه سه خط فوق ازيك نقطه بگذرند.

۳۴ـ سه خط $(a-1)x+ay+1=0$ و $x(1+3a)-y=0$ و $ax+(1-a)y-1=0$ مفروضند .

اولا ـ ثابت‌کنیدکه هريك از این سه خط بر نقطهٔ ثابتی مرور می‌کند ومختصات این سه‌نقطه را حساب‌کنید.

ثانیاً ـ ثابت کنید که این سه‌نقطه رأسهای يك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند .

ثالثاً ـ تحقیق کنید،در چه صورت، این سه خط در يك نقطه متقارب هستند.

۳۵ـ مختصات سه‌رأس مثلثی عبارتند از A(۱ و ۲) و B(۳− و ۴

و C(−۱ و −۲) . مطلوب است :

اولا ــ رسم مثلث .

ثانیاً ــ معادلات اضلاع آن .

ثالثاً ــ مختصات جدید رأسها و معادلات جدید اضلاع، هرگاه دو محور را انتقال دهیم، تا مبدأ مختصات بروسط قطعه خط AB واقع شود.

رابعاً ــ محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث .

۳۶ــ معادلات اضلاع مثلثی عبارتند از:

AB	$x+2y-3=0$
BC	$2x+y-3=0$
AC	$2x-2y+9=0$

مطلوب است : اول تعیین مختصات سه رأس مثلث .

دوم ــ محاسبهٔ مختصات نقطهٔ تلاقی سه‌میانه (G) .

سوم ــ مختصات نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع (H) .

چهارم ــ مختصات نقطهٔ تلاقی سه عمودمنصف (O) .

پنجم ــ ثابت‌کنیدکه سه‌نقطهٔ O، G و H روی یك خط مستقیم واقعند .

ششم ــ ثابت کنید که طول قطعه خط OG نصف طول قطعه خط GH است .

هفتم ــ ثابت‌کنیدکه پای سه‌ارتفاع و پای سه میانه و وسط قطعه‌خطهایی که سه‌رأس مثلث را به‌نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع وصل می‌کنند ، از وسط قطعه‌خط OH به‌یك فاصله قرار دارند.

۳۷ــ نقاط A(۱و۲) و B(−۳و۴) وخط D به‌معادلهٔ $y-3x=0$ مفروض‌است. فرض‌می‌کنیم‌که نقطهٔ P یکی‌ازنقاط خط D باشد. خط PA محور x'x را درنقطهٔ L و خط PB محور y'y را در نقطهٔ M قطع می‌کند.

اولا ــ ثابت‌کنیدکه خط LM هرگاه نقطهٔ P خط D را طی‌کند ، بر نقطهٔ ثابتی مانند N مرور می‌کند.

ثانیاً ــ تحقیق‌کنیدکه نقاط A ، B و N بر یك استقامت می‌باشند.

فصل سوم

الف ـ یادآوری و تکمیل بعض تعاریف

به شماره‌های ۲۰ تا ۳۱ (فصل دوم) مراجعه و تعاریف مربوط به متغیر و بینهایت وفاصله‌و تابع و نمو تابع و توابع صعودی و نزولی یادآوری شود .

۱ ـ متغیری که به سمت یك مقدار معین میل می‌کند ـ
در فصل دوم (شمارهٔ ۲۱ و تبصرهٔ ذیل همین شماره) مفهوم‌علامات $+\infty$ و $-\infty$ را دیدیم . ممکن است مقادیر متغیر x همواره ترقی یاتنزل کنند وبا وجود این ، متغیر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل نکنند .

مثلاً اگرفرض‌کنیم که مقادیر متوالی x عبارت باشند از :

۳/۹ ، ۳/۹۹ ، ۳/۹۹۹ و ۳/۹۹۹۹

ملاحظه می‌شود که این مقادیر ، رفته رفته ترقی می‌کنند ولی همیشه از ۴ کوچکتر هستند . واگر مقادیر متوالی x عبارت باشند از :

۴/۱ ، ۴/۰۱ ، ۴/۰۰۱ و ۴/۰۰۰۱

اگر چه x رفته رفته تنزل می‌کند، ولی همواره از ۴ بزرگتراست وچنانکه ملاحظه می‌شود ، در هر دو حالت مقادیر متوالی x رفته رفته به‌عدد ثابت ۴ نزدیك می‌شوند بطوری‌که تفاضل بین ۴ و سلسلهٔ اعدادی که x اختیار می‌کند ، بتدریج از هر عدد کوچك دلخواهی کوچکتر می‌شود . در این صورت می‌گویند **x به‌سمت عدد ۴ میل می‌کند .**

و $C(-1, -2)$. مطلوب است :

اولا ــ رسم مثلث .

ثانیاً ــ معادلات اضلاع آن .

ثالثاً ــ مختصات جدید رأسها و معادلات جدید اضلاع،هرگاه دو محور را انتقال‌دهیم، تا مبدأ مختصات بروسط قطعه خط AB واقع شود.

رابعاً ــ محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث .

۳۶ــ معادلات اضلاع مثلثی عبارتند از:

AB	$x+2y-3=0$
BC	$2x+y-3=0$
AC	$2x-2y+9=0$

مطلوب است : اول تعیین مختصات سه رأس مثلث .

دوم ــ محاسبهٔ مختصات نقطهٔ تلاقی سه‌میانه (G) .

سوم ــ مختصات نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع (H) .

چهارم ــ مختصات نقطهٔ تلاقی سه عمودمنصف (O) .

پنجم ــ ثابت‌کنیدکه سه‌نقطهٔ O، G و H روی یك خط مستقیم واقعند .

ششم ــ ثابت کنید که طول قطعه خط OG نصف طول قطعه خط GH است .

هفتم ــ ثابت‌کنیدکه پای سه‌ارتفاع و پای سه میانه و وسط قطعه‌خطهایی که سه‌رأس مثلث را به‌نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع وصل می‌کنند ، از وسط قطعه‌خط OH به‌یك فاصله قرار دارند.

۳۷ــ نقاط $A(1,2)$ و $B(-3,4)$ وخط D به‌معادلهٔ $y-3x=0$ مفروض‌است. فرض‌می‌کنیم‌که نقطهٔ P یکی‌ازنقاط خط D باشد. خط PA محور $x'x$ را درنقطهٔ L وخط PB محور $y'y$ را در نقطهٔ M قطع می‌کند.

اولا ــ ثابت‌کنیدکه خط LM هرگاه نقطهٔ P خط D را طی‌کند ، بر نقطهٔ ثابتی مانند N مرور می‌کند.

ثانیاً ــ تحقیق‌کنیدکه نقاط A ، B و N بر یك استقامت می‌باشند.

فصل سوم

الف ـ یادآوری و تکمیل بعض تعاریف

به شماره‌های ۲۰ تا ۳۱ (فصل دوم) مراجعه و تعاریف مربوط به متغیر و بینهایت وفاصله‌و تابع و نمو تابع و توابع صعودی ونزولی یاد‌آوری شود .

۱ ـ متغیری که به سمت یك مقدار معین میل می‌کند ـ

در فصل دوم (شمارهٔ ۲۱ و تبصرهٔ ذیل همین شماره) مفهوم‌علامات $+\infty$ و $-\infty$ را دیدیم . ممکن است مقادیر متغیر x همواره ترقی یاتنزل کنند وبا وجود این ، متغیر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل نکند .

مثلاً اگرفرض‌کنیم که مقادیر متوالی x عبارت باشند از :

۳/۹ ، ۳/۹۹ ، ۳/۹۹۹ و ۳/۹۹۹۹

ملاحظه می‌شود که این مقادیر ، رفته رفته ترقی می‌کنند ولی همیشه از ۴ کوچکتر هستند . واگر مقادیر متوالی x عبارت باشند از :

۴/۱ ، ۴/۰۱ ، ۴/۰۰۱ و ۴/۰۰۰۱

اگر چه x رفته رفته تنزل می‌کند، ولی همواره از ۴ بزرگتراست وچنانکه ملاحظه می‌شود ، در هر دو حالت مقادیر متوالی x رفته رفته به‌عدد ثابت ۴ نزدیك می‌شوند بطوری‌که تفاضل بین ۴ و سلسلهٔ اعدادی که x اختیار می‌کند ، بتدریج از هر عدد کوچك دلخواهی کوچکتر می‌شود . در این صورت می‌گویند **x به‌سمت عدد ۴ میل می‌کند .**

۲ ـ مقدار بعضی از توابع وقتی متغیر به سمت بینهایت میل کند .

مثال‌ـ در تابع $y=\frac{1}{x^2}$ به x مقادیری نسبت می‌دهیم که از حیث قدر مطلق رفته رفته بزرگ شوند :

به‌ازای $x=10$ داریم $y=\frac{1}{100}$	بدازای $x=-10$ داریم $y=\frac{1}{100}$
« $x=100$ « $y=\frac{1}{10000}$	« $x=-100$ « $y=\frac{1}{10000}$
« $x=1000$ « $y=\frac{1}{1000000}$	« $x=-1000$ « $y=\frac{1}{1000000}$

بطوری‌که از روی جدول فوق‌دیده می‌شود، وقتی‌که مقادیر x از حیث قدر مطلق بزرگ می‌شوند، مقادیر y رفته رفته کوچك شده به‌صفر نزدیك می‌شوند و می‌توانیم y را هرقدر بخواهیم‌کوچك‌کنیم . برای‌این کار، باید قدر مطلق x را به‌اندازهٔ کافی بزرگ اختیارکرد . برای بیان این مطلب می‌گوییم که وقتی که x به سمت $+\infty$ یا به سمت $-\infty$ میل‌کند ، y به سمت صفر میل می‌کند.

۳ـ مقدار برخی‌توابع وقتی متغیر به‌سمت مقدارمعین a یا به سمت بینهایت میل کند .

مثال ۱ـ تابع $y=\frac{2}{x-2}$ را در نظر می‌گیریم . مخرج این کسر به ازای $x=2$ صفر می‌شود . حال اگر x را با مقادیر بزرگتر از ۲ مثل ۲٫۱ و ۲٫۰۱ و ۲٫۰۰۱ وغیره به‌سمت ۲ میل دهیم، بسهولت دیده می‌شودکه مقادیر y نظیر آنها همواره مثبت هستند و رفته رفته از

هرعدد مثبت بزرگی بزرگتر می‌شوند ، یعنی تابع به سمت $+\infty$ میل می‌کند . و اگر x را با مقادیر کوچکتر از ۲ مثل ۱٫۹ و ۱٫۹۹ و ۱٫۹۹۹ و غیره به سمت ۲ میل دهیم، مقادیر y نظیر آنها همواره منفی هستند و قدر مطلقشان رفته رفته از هرعدد مثبتی بزرگتر می‌شود . یعنی تابع به سمت $-\infty$ میل می‌کند . بنابراین ، وقتی x میل‌کند به سمت ۲ ، تابع y میل می‌کند به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$.

مثال ۲ـ تابع $y=2x^3$ رادرنظرمی‌گیریم.اگر x به سمت $+\infty$ میل‌کند ، $2x^3$ نیز به سمت $+\infty$ میل می‌کند . و اگر x به سمت $-\infty$ میل‌کند، $2x^3$ به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند .

حال‌اگر نمایندهٔ x زوج باشد، مثلا اگرداشته باشیم $y=-4x^2$، چه x به سمت $+\infty$ میل‌کند و چه به سمت $-\infty$ ، در هر دو حالت x^2 به‌سمت $+\infty$ وتابع به سمت $-\infty$ میل خواهدکرد .

ب ـ رفع ابهام

تعیین مقدار کسری که به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید

۴ـ صورت $\frac{0}{0}$ ـ کسر $\frac{x^2-1}{2x-2}$ را در نظر می‌گیریم . صورت و مخرج این کسر به ازای $x=1$ صفر می‌شود . پس به ازای $x=1$ این کسر به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید . می‌دانیم که مقدار کسر $\frac{a}{b}$ که در آن $b\neq0$ است ، مساوی است با عددی که اگر آن

را در b ضرب‌کنیم، حاصل برابر a می‌شود و به‌این نتیجه می‌رسیم که $\frac{0}{0}$ مساوی است با عددی که چون آن را در صفر ضرب‌کنیم، حاصل برابر صفر شود. ازاین لحاظ می‌توان $\frac{0}{0}$ را برابر هر عدد دلخواهی فرض‌کرد و به این مناسبت می‌گویند $\frac{0}{0}$ **مبهم** است.

حال‌کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را در نظر می‌گیریم. ممکن است وقتی x به سمت a میل می‌کند، $f(a)=0$ و $g(a)=0$ باشد، ولی نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به سمت عدد معین L (یا به سمت بینهایت) میل کند. در این صورت می‌گویند مقدار حقیقی یا حدکسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ به ازای $x=a$ مساوی L (یا بینهایت) است. باید در نظر داشت که عدد a گاهی می‌تواند بینهایت نیز باشد.

مثال ـ می‌خواهیم مقدار حقیقی کسر: $y=\frac{5x^2-3x-2}{x^2-4x+3}$ را به ازای $x=1$ حساب کنیم.

صورت ومخرج این‌کسر به ازای $x=1$ صفر می‌شوند، پس‌صورت و مخرج بر $x-1$ قابل قسمت هستند و کسر فوق را بترتیب می‌توان چنین نوشت:

$$y=\frac{5x^2-3x-2}{x^2-4x+3}=\frac{(x-1)(5x+2)}{(x-1)(x-3)}=\frac{5x+2}{x-3}$$

مقدار کسر $\frac{5x+2}{x-3}$ بازای $x=1$ مساوی با $-\frac{7}{2}$ است،

به این مناسبت می‌گوییم مقدار y نیز به ازای $x=1$ مساوی با $-\frac{7}{2}$ می‌باشد.

مثال۲ ـ می‌خواهیم مقدار حقیقی کسر: $y=\frac{x^2-2x-3}{x^3-8x^2+21x-18}$ را به ازای $x=3$ بدست آوریم.

می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^2-2x-3}{x^3-8x^2+21x-18}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x-2)}$$
$$=\frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

مقدارکسر اخیر به‌ازای $x=3$ برابر است با $\pm\infty$، پس‌مقدار y نیز به ازای $x=3$ مساوی است با $\pm\infty$.

مثال۳ـ مقدارحقیقی کسر $y=\frac{2x-\sqrt{x^2+12}}{x-2}$ را به‌ازای $x=2$ بدست آورید.

به ازای $x=2$ کسر مفروض به‌صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید؛ حال‌اگر صورت ومخرج کسررا درمزدوج صورت‌ضرب‌کرده حاصل‌را ساده کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$\frac{3x^2-12}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}=\frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}$$
$$=\frac{3(x+2)}{2x+\sqrt{x^2+12}}$$

مقدار عبارت اخیر به ازای $x=2$ برابر $\frac{3}{2}$ می‌شود، پس مقدار y نیز به ازای $x=2$ مساوی است با $\frac{3}{2}$.

مثال ۴ـ می‌خواهیم مقدار حقیقی کسر $y=\frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}$ را به‌ازای $x=3$ بدست آوریم.

واضح است که کسر مفروض به ازای $x=3$ به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید؛ حال اگر مخرج کسر راگویا کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$\frac{(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{3-x}=-(2+\sqrt{x+1})$$

و مقدار عبارت اخیر به ازای $x=3$ برابر -4 می‌شود؛ پس مقدار y نیز به ازای $x=3$ مساوی است با -4.

۵ـ صورت $\frac{\infty}{\infty}$ ـ مثال ـ می‌خواهیم مقدار حقیقی کسر $y=\frac{x^2+1}{3x^2-2x+1}$ را وقتی که x به‌سمت بینهایت میل می‌کند، بدست آوریم.

وقتی که x به سمت بینهایت میل می‌کند، تابع y به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آید و مبهم است. برای رفع ابهام، صورت و مخرج را بر x^2 تقسیم می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$y=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

اگر x به سمت $\pm\infty$ میل کند، کسرهای $\frac{1}{x^2}$ و $\frac{2}{x}$ به سمت صفر میل می‌کنند و مقدار y به ازای $x=\pm\infty$ مساوی با $\frac{1}{3}$ است.

تمرین

مقدار عبارات زیر را حساب کنید:

۱ـ $y=2x-1$ به ازای $x=\pm\infty$

۲ـ $y=-3x+4$ « $x=\pm\infty$

۳ـ $y=-2x^2+5$ « $x=\pm\infty$

۴ـ $y=ax^3+1$ « $x=\pm\infty$

مطلوب است تعیین مقدار حقیقی هر یک از کسرهای زیر:

۵ـ $y=\frac{2x-3}{x+1}$ به‌ازای $x=-1$

۶ـ $y=\frac{x+1}{x^2}$ « $x=0$

۷ـ $y=\frac{3x-5}{x^3}$ « $x=0$

۸ـ $y=\frac{x^2-3}{x+1}$ « $x=-1$

مطلوب است تعیین مقادیر حقیقی کسرهای زیر:

۹ـ $y=\frac{x^2-7x+6}{x^2+5x-6}$ به‌ازای $x=1$

۱۰ـ $y=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$ « $x=1$

-۱۱ $y=\frac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}$ به‌ازای $x=1$

-۱۲ $y=\frac{2x^2+3x-2}{4x^3+16x^2-19x+5}$ « $x=\frac{1}{2}$

-۱۳ $y=\frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}}$ « $x=2$

مطلوب است تعیین مقدار حقیقی هریك از کسرهای زیر:

-۱۴ $y=\frac{x+6}{x^2-16}-\frac{x+1}{x(x-4)}$ به‌ازای $x=4$

-۱۵ $y=\frac{x^3-x}{x+1}$ « $x=-1$

-۱۶ $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ « $x=0$

-۱۷ $y=\frac{7-2x}{x^2-x-2}$ « $x=2$

مطلوب است تعیین مقدار هریك از کسرهای زیر:

-۱۸ $y=\frac{2x^2+4x-1}{x-3}$ به‌ازای $x=\infty$

-۱۹ $y=\frac{5x-1}{x^2+2}$ « $x=\infty$

-۲۰ $y=\frac{5x^3-8x^2+3x+4}{2x^3-x+6}$ « $x=\infty$

مطلوب است تعیین مقدارحقیقی هریك ازکسرهای زیر:

-۲۱ $\frac{x-4}{3-\sqrt{x^2-7}}$ به‌ازای $x=4$

-۲۲ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ « $x=0$

-۲۳ $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ « $x=1$

-۲۴ $\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ « $x=2$

-۲۵ $\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ « $x=1$

-۲۶ $\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x-\sqrt{x+2}}$ « $x=2$

-۲۷ $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}-2}$ « $x=0$

ج - مشتق

۶- توابع پیوسته (متصل) و توابع ناپیوسته (منفصل)-

تعریف - تابع $y=f(x)$ را به‌ازای $x=a$ پیوسته می‌نامند هرگاه به‌ازای $x=a$ دارای مقدار معین $f(a)$ باشد، و وقتی که x به‌سمت a میل می‌کند، y به‌سمت $f(a)$ میل کند.

اگر به‌ازای $x=a$ این شرط برقرار نباشد، می‌گویند که تابع به‌ازای $x=a$ ناپیوسته است مثلاتابع $f(x)=\frac{4}{x-1}$ به‌ازای $x=1$ ناپیوسته است زیرا به‌ازای $x=1$ مقدار تابع معین نیست: $f(1)=\infty$

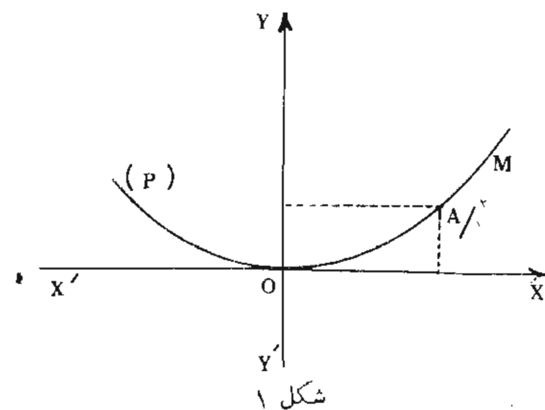
۷ ـ تعریف ـ تابع $y=f(x)$ را درفاصلهٔ (a و b) پیوسته‌می‌نامند هرگاه به ازای جمیع مقادیر x متعلق به فاصلهٔ (a و b) پیوسته باشد .

مثال ۱ ـ هرچندجمله‌ای صحیح برحسب x به‌ازای‌جمیع مقادیر x تابعی است پیوسته. مثلا تابع $f(x)=x^2+2x-1$ را در نظر می‌گیریم . واضح است که اگر x به سمت مقدار معین a میل کند ، $f(x)$ به سمت $f(a)$ میل می‌کند و بنابراین ، $f(x)$ همواره پیوسته است .

مثال ۲ـ تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ به ازای جمیع مقادیر $x \geqslant 1$ معین و پیوسته است وبه‌ازای جمیع مقادیر $x<1$ نامعین می‌باشد .

اگر تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ را درنظر بگیریم ، تابع در صورتی معین است وپیوسته که $1-x^2 \geqslant 0$ یعنی $-1 \leqslant x \leqslant +1$ باشد .

۸ ـ تبصره ـ تابع $y=\frac{x^2}{4}$ و منحنی P نمایش‌تغییرات آن‌رادر نظر می‌گیریم (شکل۱). این تابع به‌ازای‌جمیع مقادیر x معین وپیوسته است . اگر روی منحنی نقطهٔ A(۲ و ۱) را در نظر بگیریم ، بنا به تعریف توابع‌پیوسته، وقتی‌که x به‌سمت۲ میل‌کند، y به‌سمت ۱+ میل می‌کند و می‌توانیم آنقدر x را به۲ نزدیك کنیم که هر قدر بخواهیم y به۱ نزدیك شود یعنی نقطهٔ M(x و y) رامی‌توانیم هرقدر بخواهیم روی



شکل ۱

منحنی P به نقطهٔ A نزدیکتر اختیار کنیم . به عبارت دیگر ، منحنی P خطی است متصل . پس :

اگر تابع $y=f(x)$ به ازای جمیع مقادیر x اتصالی باشد ، منحنی نمایش تغییرات آن ، خطی است متصل .

۹ـ نمو تابع ـ در شمارهٔ ۲۷ فصل‌دوم دیدیم اگر متغیر x ازمقدار اولی x_1 تا مقدارثانوی x_2 تغییر کند، می‌گویندکه x به‌اندازهٔ x_2-x_1 نمو کرده است واین نمو راکه ممکن است مثبت یا منفی باشد، باعلامت Δx نشان می‌دهند بطوری‌که :

$$x_2=x_1+\Delta x \qquad \text{یا} \qquad \Delta x=x_2-x_1$$

حال اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ (a و b) معین باشد و x_1 و x_2 دو مقدار از فاصلهٔ مذکور و y_1 و y_2 مقادیر نظیر آنها از y باشند، مقدار y_2-y_1 را نمو تابع نظیر Δx می‌نامند و آن را به علامت Δy نشان می‌دهند بطوری‌که : $\Delta y=y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)$

مثال ـ تابع $y=x^2+1$ را در نظر گرفته x را از مقدار اولی $x_1=2$ به‌اندازهٔ Δx نمو داده نمو نظیرآن را برای y حساب می‌کنیم:

$$x_1=2 \qquad y_1=x_1^2+1=5$$
$$x_2=2+\Delta x \qquad y_2=(2+\Delta x)^2+1=(\Delta x)^2+4(\Delta x)+5$$

پس : $\Delta y=y_2-y_1=(\Delta x)^2+4(\Delta x)$

۱۰ـ تعریف ـ مشتق ـ فرض می‌کنیم‌که‌تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ (a و b) معین وپیوسته باشد و x_1 را مقداری از x متعلق به این فاصله فرض می‌کنیم . اگر به x_1 نموی مانند Δx بدهیم ، تابع که به ازای

$x=x_1$ برابر با $y_1=f(x_1)$ بود، نموی پیدا می‌کندکه آنرا Δy می‌نامیم. چون تابع به ازای $x=x_1$ پیوسته است ، اگر Δx به سمت صفر میل کند، Δy نیز به سمت صفر میل‌خواهدکرد ونسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ به صورت مبهم $\frac{\circ}{\circ}$ در می‌آید . حال اگر به ازای $\Delta x \longrightarrow \circ$ نسبت مزبور بسمت مقدار معینی میل‌کند، این مقدارمعین را مشتق تابع $y=f(x)$ به‌ازای $x=x_1$ می‌نامند .

مشتق تابع $y=f(x)$ به‌ازای $x=x_1$ عبارت است ازحد مقدار نسبت نموتابع به نمو نظیر آن‌ازمتغیروقتی‌که نمومتغیر بسمت صفر میل‌کند وحد مزبور وجود داشته باشد .

مشتق تابع $y=f(x)$ را به ازای $x=x_1$ با علامت y'_{x_1} یا $f'(x_1)$ نشان می‌دهند :

$$y'_{x_1}=f'(x_1)=\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\longrightarrow \circ}$$

درحالت‌کلی، به ازای هرمقدار x_1 از یك فاصله ، تابع دارای مشتقی‌است مانند $f'(x_1)$. بنابراین ، مشتق تابع $y=f(x)$ خود ، تابع دیگری است از x . این تابع را بصورت $y'=f'(x)$ می‌نویسند.

۱۱ــ قاعدهــ بطور کلی، بنابر آنچه گذشت ، قاعدهٔ زیر برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=f(x)$ به ازای $x=x_1$ بدست می‌آید :

الف ــ x را مساوی x_1 قرار داده مقدار y_1 نظیر آن را برای تابع حساب می‌کنیم .

ب ــ به x نموی مانند $\Delta x=h$ داده Δy یعنی نمو نظیر آن را برای تابع حساب می‌کنیم.

ج ــ نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل می‌دهیم و آن را ساده می‌کنیم ؛ یعنی عوامل مشترك صورت ومخرج را حذف می‌کنیم .

د ــ مقدارنسبت فوق را وقتی‌که Δx به‌سمت صفرمیل کند ، حساب می‌کنیم . این مقدار، مشتق تابع به ازای $x=x_1$ می‌باشد.

مثال ــ می‌خواهیم‌مشتق تابع $y=f(x)=x^۲$ را به‌ازای $x=۳$ حساب‌کنیم . مطابق قاعدهٔ فوق ، مرتباً می‌توان چنین نوشت :

$$x_1=۳ \qquad y_1=۹$$
$$x_۲=۳+h \qquad y_۲=(۳+h)^۲=۹+۶h+h^۲$$
$$\Delta x=x_۲-x_1=h \qquad \Delta y=y_۲-y_1=۶h+h^۲$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۶h+h^۲}{h}=۶+h$$

$$f'(۳)=\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{h\longrightarrow \circ}=۶$$

۱۲ــ برای بدست آوردن $f'(x)$ یعنی صورت کلی مشتق تابع $y=f(x)$، **مقدار اولی متغیر را به‌جای x_1 ، همان x اختیار می‌کنیم .**

مثال ۱ــ مشتق تابع $y=f(x)=۲x^۲$.

$$x_1=x \qquad y_1=۲x^۲$$
$$x_۲=x+h \qquad y_۲=۲(x+h)^۲=۲x^۲+۴hx+۲h^۲$$
$$\Delta x=x_۲-x_1=h \qquad \Delta y=y_۲-y_1=۴hx+۲h^۲$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۴hx+۲h^۲}{h}=۴x+۲h$$

$$y'=f'(x)=\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{h\longrightarrow \circ}=۴x$$

مثال ۲ــ محاسبهٔ مشتق تابع $y=ax+b$.

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x+h \\ \Delta x = x_2 - x_1 = h \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = ax+b \\ y_2 = a(x+h)+b \\ \Delta y = y_2 - y_1 = ah \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ah}{h} = a$$

چون این مقدار ثابت است، حدآن نیز وقتی h به‌سمت صفرمیل می‌کند ، ثابت و برابر با a است ؛ پس :

$$y' = \underset{h \to 0}{\text{مقدار}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = a$$

در حالت خاصی‌که a مساوی صفر و b مخالف صفر باشد، داریم:

$$y = b \quad \text{و} \quad y' = 0$$

یعنی مشتق مقدار ثابت ، صفر است .

و در حالت خاصی که $a = 1$ و $h = 0$ باشد ، داریم :

$$y = x \quad \text{و} \quad y' = 1$$

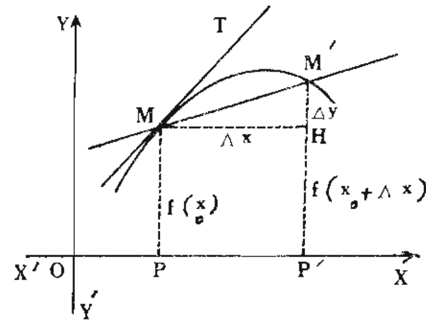
یعنی مشتق x ، مساوی واحد است .

د ـ تعبیر هندسی مشتق

۱۳ـ تعریف مماس بر یک منحنی و تعیین ضریب‌زاویه‌ای آن ـ

فرض می‌کنیم که وقتی که x در فاصلهٔ $(a$ و $b)$ تغییر می‌کند ، تابع $y = f(x)$ معین و پیوسته و به‌ازای جمیع مقادیر فاصلهٔ مزبور ، دارای مشتق باشد و منحنی نمایش تغییرات تابع را در فاصلهٔ $(a$ و $b)$ رسم کرده باشیم (شکل۲).

روی این منحنی دو نقطهٔ M و M' را بترتیب به طولهای x_0 و $x_0 + \Delta x$ متعلق به فاصلهٔ $(a$ و $b)$ اختیار می‌کنیم . واضح‌است که داریم :



شکل ۲

$$\begin{cases} \overline{PM} = f(x_0) \\ \overline{P'M'} = f(x_0 + \Delta x) \\ \overline{HM'} = \Delta y \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{OP} = x_0 \\ \overline{OP'} = x_0 + \Delta x \\ \overline{PP'} = \Delta x = \overline{MH} \end{cases}$$

مختصات M $\begin{vmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{vmatrix}$ مختصات M' $\begin{vmatrix} x_0 + \Delta x \\ f(x_0 + \Delta x) \end{vmatrix}$

وبنابر نتیجهٔ شمارهٔ ۵۵ فصل دوم :

$$\text{ضریب‌زاویه‌ای خط } MM' = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

اگر نمو تابع نظیر نمو Δx از متغیر را Δy بنامیم ، داریم :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

پس :

$$\text{ضریب‌زاویه‌ای خط } MM' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

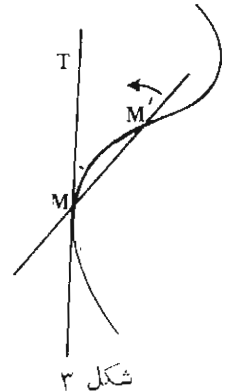
حال اگر Δx به سمت صفرمیل‌کند ، چون تابع پیوسته است، Δy نیز به سمت صفر میل می‌کند (نقطهٔ M' به نقطهٔ M نزدیک می‌شود) و $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، یعنی ضریب‌زاویه‌ای خط MM' ، به‌سمت مشتق $y'_{x_0} = f'(x_0)$ میل

می‌کند. به‌عبارت‌دیگر، وقتی که نقطهٔ M' رفته‌رفته به‌نقطهٔ ثابت M نزدیك شود، خط نامحدود MM' در حول نقطهٔ M دوران‌کرده رفته‌رفته به‌سمت خطی که ضریب زاویه‌ای آن $f'(x_0)$ می‌باشد و آن‌را MT می‌نامیم، میل می‌کند. خط MT را مماس برمنحنی در نقطهٔ M می‌نامند (نقطهٔ M نقطهٔ تماس است).

از آنچه‌گذشت، تعریف و قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

تعریف ـ مماس بر یك منحنی در یکی از نقاط آن مانند M عبارت است از حد اوضاع خط راستی که این نقطه را به نقطهٔ متحرك M' از منحنی وصل می‌کند وقتی‌که M' بینهایت به M نزدیك شود.

قضیه ـ ضریب زاویه‌ای خط مماس برمنحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ به‌طول x_0 عبارت است از مشتق تابع y وقتی‌که در آن به‌جای x طول نقطهٔ تماس را قرار دهیم. یعنی مساوی است با $y'_{x_0}=f'(x_0)$



شکل ۳

بخصوص، اگر مقدار $f'(x_0)$ مساوی صفر باشد، مماس برمنحنی در نقطهٔ به‌طول x_0 موازی با محور $x'x$ است.

تعیین معادلهٔ مماس بر یك منحنی در یك نقطهٔ معلوم

۱۴ـ مسئله ـ می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس برمنحنی $y=x^۲$ را در نقطهٔ M به‌طول ۳ بنویسیم.

چون نقطهٔ M روی منحنی واقع است، مختصات آن عبارتند از: $M(۳و۹)$ و می‌دانیم که صورت کلی معادلهٔ خطوط مار بر نقطهٔ M عبارت است از:

$$y-۹=m(x-۳)$$

حال چون دراین معادله به‌جای m مشتق تابع را به‌ازای $x=۳$ قرار دهیم، معادلهٔ مماس در نقطهٔ M برمنحنی بدست می‌آید.

اما می‌دانیم (مثال شمارهٔ ۱۱ همین‌فصل) که مشتق تابع $y=x^۲$ به ازای $x=۳$ برابر است با ۶، پس معادلهٔ خط مماس عبارت است از:

$$y-۹=۶(x-۳) \quad \text{یا} \quad y=۶x-۹$$

از مثال فوق معلوم می‌شود که **بطور کلی معادلهٔ مماس برمنحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ به مختصات x_1 و y_1 عبارت است از:**

$$\boxed{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)}$$

۵ـ محاسبهٔ مشتق توابع سادهٔ جبری

۱۵ ـ محاسبهٔ مستقیم مشتق یك تابع اغلب طولانی است و به‌جای اینکه برای هر تابع مقدار $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\to 0}$ را حساب‌کنیم، چند قضیه ثابت می‌کنیم که از روی آنها می‌توان با داشتن مشتق توابع ساده، مشتق هر تابع را بآسانی حساب‌کرد. در قضایای زیر مثلا وقتی که می‌گوییم توابع u و v از متغیر x دارای مشتق هستند، مقصود این است که این دو تابع هر دو درفاصلهٔ معلومی معین و به ازای جمیع مقادیر این‌فاصله دارای‌مشتق‌هستند وما x را متعلق به‌این‌فاصله فرض کرده‌ایم؛ مشتق توابع

مزبور را با u' و v' نشان می‌دهیم .

۱۶ – مشتق مجموع چند تابع – مشتق مجموع جبری چند تابع برابر است با مجموع جبری مشتقهای آنها .

به شرط آنکه هریك از توابع مزبور دارای مشتق باشند .

فرض می‌کنیم که u ، v و w سه تابع از متغیر x و هریك از آنها دارای مشتق باشند . دراین صورت می‌خواهیم ثابت کنیم که مشتق تابع :

$$y=u+v+w$$

عبارت است از :

$$\boxed{y'=u'+v'+w'}$$

اگر به x نموی مانند Δx بدهیم و نموهای متناظر آن را برای توابع u ، v ، w و y بترتیب Δu ، Δv ، Δw و Δy بنامیم ، داریم :

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)+(w+\Delta w)$$
$$=(u+v+w)+(\Delta u+\Delta v+\Delta w)$$
$$=y+(\Delta u+\Delta v+\Delta w)$$

و از آنجا :

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v+\Delta w$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

حال اگر Δx به سمت صفر میل کند ، $\frac{\Delta u}{\Delta x}$، $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ بترتیب به سمت u' ، v' و w' میل می‌کنند، بنابراین مجموع آنها یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بسمت مجموع حدود ، یعنی $u'+v'+w'$ میل می‌کند ، پس:

$$\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\to 0}=y'=u'+v'+w'$$

مثال ۱– مشتق تابع $y=2x^2+x+11$ برابر است با :

$$y'=(2x^2)'+(x)'+(11)'$$

اما مشتق $2x^2$ برابر است با $4x$ (مثال ۱ شمارهٔ ۱۲ همین فصل) و مشتق x مساوی است با ۱ و مشتق مقدار ثابت ۱۱ صفر است (مثال ۲ شمارهٔ ۱۲ همین فصل)، پس: $y'=4x+1$

مثال ۲– مشتق تابع $y=f(x)+c$ که در آن c مقداری است ثابت ، برابراست با $y'=f'(x)$ ، زیرا مشتق مقدار ثابت c صفراست . بنابراین اگر تفاضل دو تابع مقدار ثابتی باشد ، آن دو تابع دارای یك مشتق می‌باشند مثلا : $y=2x^2+x+11$ و $y=2x^2+x+\sqrt{2}$ که مشتق هر دوآنها $4x+1$ می‌باشد .

۱۷ – مشتق حاصل ضرب دو تابع – قضیه – اگر u و v دو تابع از متغیر x وهر یك دارای مشتقی باشند ، مشتق حاصل ضرب این دو تابع یعنی مشتق تابع $y=uv$ برابر است با: $y'=vu'+uv'$

زیرا اگر به x نموی مانند Δx داده نموهای نظیر آن را برای u ، v و y بترتیب Δu ، Δv و Δy بنامیم داریم :

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+(\Delta u)v+(\Delta v)u+(\Delta u)(\Delta v)$$
$$=y+(\Delta u)v+(\Delta v)u+(\Delta u)(\Delta v)$$

پس :

$$\Delta y=(\Delta u)v+(\Delta v)u+(\Delta u)(\Delta v)$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v$$

حال اگر Δx به سمت صفر میل کند، $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ به سمت u' و $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ به سمت v' ، و Δv به سمت صفر میل می‌کند، پس:

$$\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x \to 0} = y' = vu' + uv'$$

مثال — مشتق تابع $y = 2x^2(x+1)$ عبارت است از:

$$y' = (2x^2)'(x+1) + 2x^2(x+1)'$$

یا

$$y' = 4x(x+1) + 2x^2 = 6x^2 + 4x$$

۱۸ — مشتق حاصل ضرب چند تابع — قضیه — اگر u ، v و w سه تابع از متغیر x و هر یك دارای مشتقی باشند، مشتق حاصل ضرب آنها یعنی مشتق تابع $y = uvw$ برابر است با:

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

یعنی برای بدست آوردن مشتق حاصل ضرب چند تابع به جای هر یك از آنها بطور متوالی مشتق آن را در حاصل ضرب قرار داده جمله‌های حاصل را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

زیرا می‌توان نوشت:

$$y = uvw = (uv)w$$
$$y' = (uv)'w + uvw'$$
$$y = (u'v + v'u)w + uvw'$$

و

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

اگر عدهٔ توابع بیش از ۳ باشد، استدلال همینطور است.

نتیجهٔ ۱ — مشتق حاصلضرب یك تابع در یك عدد ثابت مساوی است با حاصلضرب مشتق آن تابع در آن عدد ثابت.

زیرا می‌دانیم که مشتق مقدار ثابت صفر است، پس اگر داشته باشیم:

$$y = A \times f(x)$$

داریم:

$$y' = A' \times f(x) + A \times f'(x) = A \times f'(x)$$

مثال — مشتق $15x$ برابر است با 15×1 یعنی ۱۵ و مشتق تابع $y = 4(2x^2 - x)$ عبارت است از $y' = 4(4x - 1)$

نتیجهٔ ۲ — اگر تابع u از متغیر x دارای مشتق باشد، قوهٔ mام آن (m عددی است صحیح و مثبت) نیز دارای مشتق است و این مشتق برابر است با m برابر حاصل ضرب مشتق تابع u در قوهٔ ۱ — mام خود آن تابع.

یعنی اگر داشته باشیم $y = u^m$ داریم:

$$y' = mu'u^{m-1}$$

زیرا می‌توان نوشت:

$$y = u^m = \overbrace{u \times u \times \cdots \times u}^{m \text{ مرتبه}}$$

پس:

$$y' = \overbrace{u' \times u^{m-1} + u' \times u^{m-1} + \cdots + u' \times u^{m-1}}^{m \text{ مرتبه}}$$

یا

$$y' = mu'u^{m-1}$$

مثال - مشتق تابع $y = x^5$ برابر با $y' = 5x^4$ و مشتق تابع

$y=9x^3$ برابر با $y'=27x^2$ می‌باشد . همچنین مشتق تابع $y=x^m$ (m عددی است صحیح و مثبت) عبارت است از : $y'=mx^{m-1}$.

همچنین مشتق تابع $y=(x^2-1)^3$ برابر است با $y'=6x(x^2-1)^2$.

با استفاده از آنچه گذشت، می‌توان مشتق یك چند جمله‌ای درجهٔ m‌ام را حساب کرد . مثلا اگر داشته باشیم : $y=7x^4-3x^2+4x-1$

داریم : $y'=28x^3-6x+4$

۱۹- مشتق نسبت دو تابع - قضیه - اگردو تابع u و v ازمتغیر x هریك دارای مشتق باشند و $y=\frac{u}{v}$ باشد ، به ازای مقادیری از x که مخرج را صفرنکنند تابع y دارای مشتق است و داریم :

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

زیرا اگر به x نموی مانند Δx داده نمو نظیر آن را برای توابع u ، v و y بترتیب Δu ، Δv و Δy بنمیم داریم :

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

و از آنجا :

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+uv}-\frac{u}{v}=\frac{v(\Delta u)-u(\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

پس :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v(\Delta v)}$$

حال اگر Δx به سمت صفر میل کند، $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ بسمت u' و $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ به سمت v' ، و $v\times(\Delta v)$ به سمت صفر میل می‌کند ، پس :

$$\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\to 0}=y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

نتیجه - اگر m عدد صحیح و مثبتی باشد ، مشتق تابع $y=\frac{1}{u^m}$ برابر است با :

$$y'=\frac{-mu'u^{m-1}}{u^{2m}}=-\frac{mu'}{u^{m+1}}$$

واز آنجا : $(u^{-m})'=-mu'u^{-m-1}$

یعنی دستور (شمارهٔ ۱۸ نتیجهٔ ۲) به ازای جمیع مقادیر صحیح m (مثبت یا منفی یا صفرصحیح است)

$$y'=mu'u^{m-1}$$

مثال ۱- مشتق تابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ مطابق دستور شمارهٔ ۱۹ عبارت است از :

$$y'=\frac{a(a'x+b')-a'(ax+b)}{(a'x+b')^2}=\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$$

مثال ۲- مشتق تابع $y=\frac{1}{v}$ عبارت است از :

$$y'=\frac{0\times v-v'\times 1}{v^2}=-\frac{v'}{v^2}$$

و همچنین مشتق تابع $y=\frac{1}{x}$ عبارت است از : $y'=\frac{-1}{x^2}$

۲۰ ـ قضیه ـ اگر تابعی دارای مشتق باشد، ریشهٔ دوم آن نیز دارای مشتق است[1] و این مشتق مساوی است با نسبت مشتق تابع بر دوبرابر ریشهٔ دوم خود تابع.

یعنی اگر $y=\sqrt{u}$ و u مشتق داشته باشد، داریم:

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

زیرا اگر به x نموی مانند Δx داده نموِ نظیر آن را برای u و y بترتیب Δu و Δy بنامیم داریم: $y+\Delta y=\sqrt{u+\Delta u}$

و از آنجا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u}}{\Delta x}$$

واگر صورت و مخرج کسر طرف دوم را در $\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}$ ضرب کنیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x(\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u})}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

حال اگر Δx بسمت صفر میل کند، Δu به سمت صفر و $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ به سمت u' میل می‌کند و داریم:

$$\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\to 0}=y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

---

۱ ـ به ازای مقادیری از x که تابع بهازای آنها مثبت و مخالف صفر باشد.

مثال ۱ ـ مشتق تابع $y=\sqrt{x}$ مساوی است با $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال ۲ ـ مشتق تابع $y=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ را حساب می‌کنیم.

داریم:

$y=\sqrt[m]{u^n} \to y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

$$y'=\frac{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}}$$

اما:

$$\left(\frac{x+a}{x-a}\right)'=\frac{x-a-(x+a)}{(x-a)^2}=\frac{-2a}{(x-a)^2}$$

پس:

$$y'=\frac{-2a}{(x-a)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}}=\frac{-a}{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}$$

تمرین

مشتق توابع زیررا مستقیماً واز روی تعریف مشتق بهازای هر یك از مقادیر معلوم حساب کنید:

۱ـ $y=-2x+1$ بهازای $x=3$ ، ۰ و a

۲ـ $y=\frac{x}{1-x}$ « $x=-1$ ، $\sqrt{2}$ و $\frac{1}{3}$

۳ـ $y=\frac{(x-1)^2}{x}$ « $x=\frac{1}{3}$ ، $1+\sqrt{2}$ ، a و ۱

۴ـ $y=\sqrt{x}$ « $x=4$ ، $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{2}$

-۵ $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ به‌ازای $x=a^2$ ، $-a$ و $\frac{a}{2}$

-۶ $y=\frac{x-a}{(x+a)^2}$ ، $x=1+a$ و $\sqrt{2}$

-۷ $y=\frac{(x-a)^2}{a}$ ، $x=0$ ، a و $2a$

مشتق توابع زیر را به‌وسیلهٔ دستورهای مشتق تعیین کنید:

-۸ $y=3x^2$ -۹ $y=x^2+7$

-۱۰ $y=5-4x$ -۱۱ $y=2x^2-4x$

-۱۲ $y=x^3+x^2-2x$ -۱۳ $y=x^4-2x^2+1$

-۱۴ $y=\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}x^2+1$ -۱۵ $y=\frac{x^2-5x+4}{4}$

-۱۶ $y=(1+x)(1-x)$ -۱۷ $y=(1-x^2)(1+2x)$

-۱۸ $y=(x-3)^4$ -۱۹ $y=(8x-3)^2$

-۲۰ $y=(x+3)^2(2-x)$ -۲۱ $y=(3x^2-1)^2$

-۲۲ $y=x(x-1)^3$ -۲۳ $y=x^2(1+x)^3(1-x)^2$

-۲۴ $y=ax^3+bx^2+cx+d$

-۲۵ $y=(a-b)x^2-ax+b$

-۲۶ $y=\frac{1}{x}$ ، $y=\frac{1}{x^2}$ ، $y=\frac{1}{x^3}$ و $y=\frac{1}{x^4}$

-۲۷ $y=\frac{x-2}{x+2}$ -۲۸ $y=\frac{a-x}{x}$

-۲۹ $y=\frac{1}{1+x^2}$ -۳۰ $y=\frac{x^2}{x-5}$

-۳۱ $y=\frac{x+1}{x^2}$ -۳۲ $y=\frac{ax}{a'x+b'}$

-۳۳ $y=\frac{x^2-3x^3}{5-x^2}$ -۳۴ $y=\frac{x(ax-b)^2}{ax+b}$

-۳۵ $y=\frac{(x-3)^2}{(x+2)^2}$ -۳۶ $y=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}$

-۳۷ $y=\frac{2x+1}{4x^2+3x}$ -۳۸ $y=\frac{x^2-9}{x^2+12x+11}$

-۳۹ $y=\sqrt{x+5}$ -۴۰ $y=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

-۴۱ $y=\frac{x}{\sqrt{a^2+x}}$ -۴۲ $y=x-\sqrt{1-x^2}$

-۴۳ $y=x+\sqrt{1+x^2}$ -۴۴ $y=x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$

-۴۵ $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ -۴۶ $y=x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

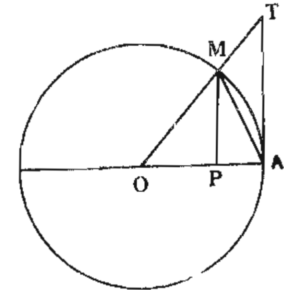
-۴۷ $y=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ -۴۸ $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

-۴۹ $y=\sqrt{\frac{x(2-x)}{x^2+4x-3}}$ -۵۰ $y=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}-x}$

و- مشتق توابع سادهٔ مثلثاتی

۲۱- مقایسهٔ $\sin x$ و $tg\, x$ با x وقتی که x نزدیك به صفر است.

کمان AM از دایرهٔ مثلثاتی به مرکز O را در نظر می‌گیریم و اندازهٔ آن را برحسب رادیان x می‌نامیم و فرض می‌کنیم که $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد (شکل ۴).



شکل ۴

امتداد شعاع OM مماس در نقطهٔ A بر دایره را در نقطهٔ T قطع می‌کند. اگر از نقطهٔ M عمود MP را برشعاع OA فرودآوریم، $PM=\sin x$ و $AT=tg\, x$ می‌باشد.

نظر به فرضی که کرده‌ایم، اندازه‌های نسبتهای مثلثاتی x مثبت واز روی شکل پیداست که:

مساحت‌مثلث OAT > مساحت قطاع OAM > مساحت مثلث OAM

یا:
$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tg\, x$$

وبالاخره:
$$\sin x<x<tg\, x$$

(فراموش نشودکه x اندازهٔ $\widehat{AM}$ برحسب رادیان است).

قضیه - هرگاه کمانی از دایره بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ رادیان محصور باشد، اندازهٔ آن برحسب رادیان بین سینوس و تانژانت همان کمان محصوراست.

نتیجه - اگر x منفی ومحصور بین $-\frac{\pi}{2}$ و ۰ باشد، می‌توان چنین نوشت:
$$\sin x>x>tg\, x$$

۲۲- قضیه - اگر x اندازهٔ یك کمان برحسب رادیان باشد، نسبت $\frac{\sin x}{x}$ وقتی که x به سمت صفر میل کند به سمت واحد میل خواهد کرد

برهان - می‌دانیم که اگر داشته باشیم $|x|<\frac{\pi}{2}$

به‌ازای $x>0$ داریم:
$$0<\sin x<x<tg\, x$$

و به ازای $x<0$ داریم:
$$0>\sin x>x>tg\, x$$

پس به هرحال می‌توان چنین نوشت:
$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{tg\, x}{\sin x}$$

یا
$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

حال وقتی که x به سمت صفر میل کند، $\cos x$ به‌سمت ۱ میل می‌کند ونسبت $\frac{x}{\sin x}$ یا عکس آن، که بین ۱ و عددی که به سمت ۱ میل می‌کند محصور است، به سمت ۱ میل می‌کند یعنی:

مقدار $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x\to 0}=1$

۲۳ - قضیه - تابع $\sin x$ به‌ازای جمیع مقادیر x پیوسته است.

برهان ـ برای آنکه ثابت کنیم که تابع $\sin x$ به ازای جمیع مقادیر x پیوسته است، کافی است ثابت کنیم که اگر x به سمت مقدار a میل کند، $\sin x$ به‌سمت $\sin a$ میل می‌کند. به عبارت دیگر، اگر $x-a$ به سمت صفر میل کند، $\sin x - \sin a$ نیز به سمت صفر میل خواهدکرد. می‌توان چنین نوشت:

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}$$

و چون داریم: $\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| < 1$

خواهیم داشت: $|\sin x - \sin a| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$

حال وقتی‌که $x-a$ به سمت صفر میل کند، بنا به قضیهٔ شمارهٔ ۲۱، همواره داریم:

$$2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| < 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|$$

پس: $|\sin x - \sin a| < |x-a|$

یعنی وقتی‌که $x-a$ به‌سمت صفر میل کند، عبارت $\sin x - \sin a$ نیز به سمت صفر میل می‌کند و قضیه ثابت است.

۲۴ ـ قضیه ـ تابع $y=\cos x$ به‌ازای جمیع مقادیر x تابعی است پیوسته. (استدلال مثل حالت قبل است)

۲۵ ـ قضیه ـ تابع $y=tg\,x$ به‌ازای جمیع مقادیر x اتصالی است مگر به‌ازای $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (چرا؟)

۲۶ ـ مشتق $\sin x$ ـ مشتق تابع $y=\sin x$ عبارت است از: $y'=\cos x$. زیرا اگر به x نموی مانند Δx نسبت دهیم، برای y نموی مانند Δy حاصل می‌شودو داریم:

$$y+\Delta y = \sin(x+\Delta x)$$

و

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

واز آنجا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

حال اگر Δx به‌سمت صفر میل‌کند، کسر $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ بنا به قضیهٔ شمارهٔ ۲۲ به‌سمت واحد میل می‌کند، پس:

$$\text{مقدار}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\to 0} = y' = \cos x$$

۲۷ ـ مشتق $\cos x$ ـ مشتق تابع $y=\cos x$ عبارت است از: $y'=-\sin x$. زیرا چون مانند شمارهٔ قبل استدلال‌کنیم داریم:

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

یا :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

و مقدار $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x\to 0}=y'=-\sin x$

۲۸- مشتق $tg\,x$ - مشتق تابع $y=tg\,x$ عبارت است از: $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$. زیرا می‌توان نوشت $y=tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$

و مطابق دستور شمارهٔ ۱۹ راجع به مشتق نسبت دو تابع داریم:

$$y'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

۲۹- مشتق $y=cotg\,x$ عبارت است از $y'=\frac{-1}{\sin^2 x}$ (چرا ؟)

۳۰ - تبصرهٔ مهم - در قضایای ۲۶ ، ۲۷ ، ۲۸ و ۲۹ همواره فرض کرده‌ایم که اندازهٔ کمان x بر حسب رادیان باشد .

تمرین

مشتق توابع زیر را مستقیماً به‌ازای $x=\frac{\pi}{4}$ حساب کنید :

۱- $y=tg\,x$	۲- $y=\cos x$

۳- $y=\sin x$	۴- $y=2\,tg\,x$

مشتق توابع زیر را حساب کنید :

۵- $y=a+\sin x$	۶- $y=\frac{5}{2}\sin x$

۷- $y=\frac{1}{\cos x}$	۸- $y=\sin x+\cos x$

۹- $y=2\sin x-5\cos x$	۱۰- $y=-\frac{1}{2}\sin x+\cos^2\frac{x}{2}$

۱۱- $y=\cos^2 x-\sin^2 x$	۱۲- $y=\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

۱۳- $y=3\sin x-\cos x+tg\,x$

مطلوب است محاسبهٔ مشتق توابع زیر :

۱۴- $y=1+5\cos x$	۱۵- $y=x+\sin x$

۱۶- $y=\frac{2}{3}\sin x$	۱۷- $y=5+tg\,x$

۱۸- $y=2\,cotg\,x+1$	۱۹- $y=\sin x+\cos x$

۲۰- $y=tg\,x+\sin x$	۲۱- $y=3\sin x+7\cos x$

۲۲- $y=x^2+\cos^2 x$	۲۳- $y=a+\sin^2 x$

۲۴- $y=tg^2 x$	۲۵- $y=cotg^2 x$

۲۶- $y=\frac{\cos x}{1-\cos x}$	۲۷- $y=\frac{\sin x}{1+\sin x}$

۲۸- $y=\frac{tg\,x}{1+\sin x}$	۲۹- $y=\frac{\sin x}{1+tg^2 x}$

ز ـ موارد استعمال مشتق برای تعیین تغییرات توابع

۳۱ـ تعاریفی راکه در شماره‌های ۲۸ و ۲۹ فصل دوم دیدیم ، به صورت زیر خلاصه می‌کنیم :

تعریف ـ توابع صعودی و توابع نزولی ـ تابع $y=f(x)$ را صعودی می‌نامند هرگاه جهت تغییرات x و y یکی باشد . و در صورتی که جهت تغییرات تابع و متغیر یکی نباشد ، تابع را نزولی می‌گویند .

(اگر y با تغییرکردن متغیر x تغییر نکند، آن‌را ثابت می‌نامیم)

تابع $y=f(x)$ و فاصلهٔ (a ، b) را در نظر گرفته فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو مقدار دلخواه از x متعلق به فاصلهٔ (a ، b) و y_1 و y_2 مقادیر نظیرآنها برای تابع باشد: در این صورت،اگردومقدار x_2-x_1 و y_2-y_1 متحدالعلامه باشند ، تابع در فاصلهٔ (a ، b) صعودی‌است و اگر این دو مقدار مختلف‌العلامه باشند ، تابع در فاصلهٔ (a ، b) نزولی است .

مثال ـ $y=\frac{1}{x}$ در هر فاصله‌ای که شامل صفر نباشد (یعنی‌جمیع مقادیرش مثبت یا منفی باشند)، نزولی است .

در واقع : $$y_2-y_1=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=-\frac{x_2-x_1}{x_2x_1}$$

چون مخرج مثبت‌است،علامت y_2-y_1 مخالف علامت x_2-x_1 می‌باشد؛ پس به‌ازای $x_2>x_1$ داریم : $y_2<y_1$ و لذا جهت تغییرات‌تابع با جهت تغییرات متغیر یکی نیست و تابع نزولی می‌باشد.

۳۲ـ تعریف ـ ماکزیمم ومینیمم ـ اگر تابع $y=f(x)$ به ازای $x=x_1$ پیوسته باشد و به‌ازای مقادیر کمی کوچکتر از x_1 صعودی‌و به‌ازای مقادیر کمی بزرگتر از آن نزولی باشد ، می‌گویند تابع به‌ازای $x=x_1$ ماکزیمم است ؛ و چنانچه تابع به ازای مقادیر کمی کوچکتر از x_1 نزولی‌و به ازای مقادیر کمی بزرگتر از آن صعودی باشد ، می‌گویند تابع به ازای $x=x_1$ مینیمم است.

مثال ۱ـ تابع $y=-x^2$ به‌ازای‌جمیع مقادیر x ، ازجمله‌صفر، معین و پیوسته است . حال از روی جدول زیر بآسانی دیده می‌شود که وقتی‌که x از مقادیرکوچکتر از صفر ترقی کرده به صفر نزدیك می‌شود، تابع صعود می‌کند ؛ و وقتی که x از صفر ترقی کرده رفته رفته بزرگ می‌شود، تابع نزول می‌کند؛ پس تابع‌به‌ازای‌مقادیر کمی‌کوچکتراز‌صفر، صعودی و به‌ازای مقادیر کمی بزرگتر از‌آن، نزولی می‌باشد؛ یعنی‌تابع به‌ازای $x=0$ ماکزیمم است .

x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
y	−۱۶ ↗	−۹ ↗	−۴ ↗	−۱ ↗	۰ ↘	−۱ ↘	−۴ ↘	−۹ ↘	−۱۶
					ماکزیمم				

مثال ۲ـ مانند مثال ۱ ، دیده می‌شود که $y=x^2$ که به‌ازای $x=0$ پیوسته است ، به ازای مقادیر x کمی‌کوچکتر ازصفر ، نزولی و **به‌ازای مقادیر x کمی بزرگتر از صفر ، صعودی است ؛ پس این تابع**

به ازای $x=0$ مینیمم است :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	۱۶ ↘	۹ ↘	۴ ↘	۱ ↘	۰ ↗ مینیمم	۱ ↗	۴ ↗	۹ ↗	۱۶

۳۳ـ قضیه ـ اگر تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ (a,b) * صعودی باشد، مشتق آن به ازای هیچیك از مقادیر x متعلق به این فاصله منفی نیست؛ یعنی همواره مثبت یا به‌ازای بعض مقادیر x ، صفر است .

برهان ـ اگر x_1 و $x_2=x_1+\Delta x$ دو مقدار از x متعلق به‌فاصلهٔ (a,b) و y_1 و $y_2=y_1+\Delta y$ مقادیر نظیر آنها از تابع y باشند، عبارات: $\Delta x=x_2-x_1$ و $\Delta y=y_2-y_1$ متحدالعلامه هستند : زیرا تابع در فاصلهٔ (a,b) صعودی فرض شده است ؛ پس کسر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همواره مثبت است ومقدار این کسر، یعنی‌مشتق تابع به‌ازای $x_2=x_1$ ، نمی‌تواند‌منفی باشد(یعنی مثبت یا صفر است) . به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کرد‌که :

۳۴ـ قضیه ـ اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ (a,b) نزولی باشد ، مشتق آن به‌ازای هر یك از مقادیر x متعلق به‌این فاصله منفی است و ممکن است به‌ازای برخی از این مقادیر نیز صفر باشد ولی هرگز مثبت نیست.

۳۵ ـ قضیهٔ‌عکس ـ اگر مشتق تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ (a,b) مثبت باشد ، تابع در این فاصله صعودی است .

زیرا اگر در فاصلهٔ (a,b) تابع نزولی می‌بود ، بنا به قضیهٔ ۳۴

* یعنی وقتی x در فاصلهٔ (a,b) تغییر می‌کند .

بایستی مشتق آن منفی یا صفر باشد، نه‌مثبت؛ و از طرف دیگر تابع نمی‌تواند در فاصلهٔ (a,b) ثابت باشد ؛ زیرا در این صورت، بایستی‌مشتق همواره صفر باشد ، نه مثبت ؛ پس تابع دراین فاصله صعودی است .

به همین طریق ثابت می‌شود که :

۳۶ ـ قضیه ـ اگر مشتق تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ (a,b) منفی باشد ، تابع در این فاصله نزولی است .

۳۷ ـ موارد استعمال ـ با بکاربردن‌قضایای فوق، ممکن‌است که به‌وسیلهٔ تحقیق علامت مشتق هرتابع ، معلوم‌کرد‌که آن تابع در چه فاصله یا فواصلی صعودی و در چه فاصله یا فواصلی نزولی است ؛ چه در هر فاصله‌ای که مشتق مثبت باشد،تابع صعودی و در هر فاصله‌ای که‌مشتق منفی باشد ، تابع نزولی است .

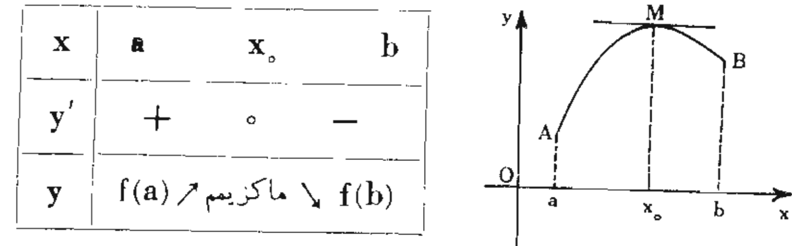
مثال ۱ـ مشتق تابع $y=2x-1$ عبارت است از $y'=2$ که همیشه مثبت است ؛ بنابراین ، تابع‌فوق به‌ازای جمیع مقادیر x صعودی است .

مثال ۲ـ مشتق تابع $y=1-3x$ عبارت‌است از $y'=-3$ که همیشه منفی‌است؛ بنابراین . تابع فوق به‌ازای‌جمیع مقادیر x نزولی‌است.

مثال۳ـ مشتق‌تابع $y=x^2-4x+3$ عبارت‌است‌از $y'=2x-4$ که به ازای $x=2$ صفر و به ازای $x<2$ منفی و به ازای $x>2$ مثبت می‌باشد ؛ بنابراین، تابع مفروض به‌ازای مقادیر $x<2$ نزولی و به‌ازای مقادیر $x>2$ صعودی است .

۳۸ـ تعیین ماکزیمم و مینیمم به وسیلهٔ مشتق ـ فرض می‌کنیم

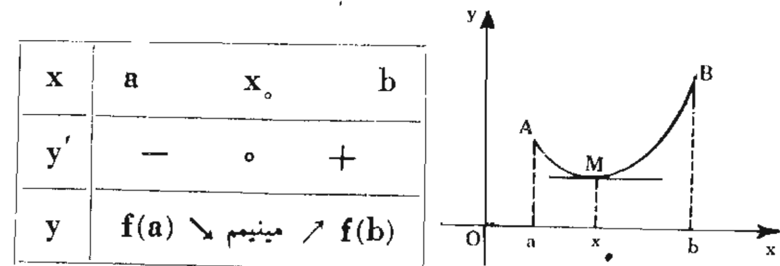
گه وقتی‌که x از a تا b ترقی می‌کند، مشتق تابع $y=f(x)$ ابتدا مثبت باشد و به‌ازای $x=x_0$ صفر شود و بعد منفی گردد ؛ دراین‌صورت،تابع در فاصلهٔ $(a ، x_0)$ صعودی و در فاصلهٔ $(x_0 ، b)$ نزولی است و بنا به تعریف شمارهٔ ۳۲ تابع به‌ازای $x=x_0$ ماکزیمم است .



x	a	x_0	b
y'	+	۰	−
y	$f(a)$ ↗	ماکزیمم	↘ $f(b)$

شکل ۵

همچنین می‌بینیم که اگر مشتق تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $(a،b)$ ابتدا منفی بوده به‌ازای $x=x_0$ صفر شود و بعد مثبت باشد ، تابع به ازای $x=x_0$ مینیمم است .



x	a	x_0	b
y'	−	۰	+
y	$f(a)$ ↘	مینیمم	↗ $f(b)$

شکل ۶

۳۹ـ قاعده ـ مقادیری از x که به‌ازای آنها تابع‌ماکزیمم‌یامینیمم است مقادیری هستندکه مشتق به ازای آنها صفر شده تغییر علامت می‌دهد. برحسب آنکه به‌ازای $x=x_0$ مشتق صفر شده ازمثبت منفی‌گردد یا ازمنفی مثبت شود تابع به ازای $x=x_0$ دارای ماکزیمم یا مینیمم است .

مثال ۱ـ می‌خواهیم تعیین کنیم به ازای چه مقادیر x تابع : $y=-x^2-x+1$ ماکزیمم یا مینیمم است .

مشتق تابع فوق را حساب می‌کنیم: $y'=-2x-1$

این‌مشتق به‌ازای $x=-\frac{1}{2}$ صفر می‌شود و علامت آن، اگر x بزرگتر از $-\frac{1}{2}$ باشد ، منفی واگر x کوچکتر از $-\frac{1}{2}$ باشد ، مثبت است و می‌توان جدول زیر را تشکیل داد :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		۰		$+\infty$
y'		+	۰	−			
y	$-\infty$	↗	$\frac{5}{4}$ ماکزیمم	↘	۱	↘	$-\infty$

بطوری که در این جدول مشاهده می‌سود ، تابع مفروض به‌ازای مقادیر $x<-\frac{1}{2}$ صعودی وبه ازای مقادیر $x>-\frac{1}{2}$ نزولی می‌باشد ؛ بنابراین ، تابع‌به‌ازای $x=-\frac{1}{2}$ دارای‌یك ماکزیمم مساوی با $\frac{5}{4}$ است .

مثال ۲ـ تابع $y=\frac{x^3}{3}+x-2$ را در نظر می‌گیریم ؛ مشتق این تابع یعنی $y'=x^2+1$ همواره مثبت است وبنابراین، تابع به‌ازای جمیع مقادیر x صعودی است و دارای ماکزیمم یا مینیمم نمی‌باشد .

تبصره ـ اگر به ازای $x=x_0$ تابع $y=f(x)$ ماکزیمم یا مینیمم باشد، مشتق‌آن به‌ازای این‌مقدار، یعنی $f'(x_0)$ ، صفراست؛پس

مماس بر منحنی نمایش تغییرات تابع در نقطهٔ به طول $x=x_0$ ، موازی با محور $x'x$ است .

ح - ترسیم جدول و منحنی نمایش تغییرات یك تابع

۴۰- بنا بر آنچه‌گذشت ، قاعدهٔ عملی زیر برای تعیین تغییرات توابع و ترسیم منحنی نمایش این تغییرات بدست می‌آید :

قاعده - اول مقادیری‌از x راکه به ازای آنها تابع معین یا نامعین است تعیین و فواصلی را که تابع درآنها پیوسته است ، معلوم می‌کنیم .

دوم مشتق تابع را حساب کرده مقادیری را که به‌ازای آنها مشتق معین است وهمچنین‌مقادیری‌راکه به‌ازای آنها مشتق تغییر علامت می‌دهد، تعیین می‌کنیم .

سوم حد تابع را به‌ازای $x=\pm\infty$ معین می‌کنیم . همچنین بعضی نقاط مشخص منحنی مثل نقاط تقاطع منحنی با محورهای مختصات‌را بدست می‌آوریم .

چهارم مقادیر x را در جدولی برحسب مقادیر صعودی تنظیم کرده به این ترتیب ، فواصلی را بدست می‌آوریم که در هر یك ازآنها تابع معین است وعلامت مشتق در تمام آن فاصله یکی می‌باشد .

پنجم از روی جدول فوق ، جهت تغییرات تابع را در هر یك از فواصل مذکور معین و منحنی تغییرات آن را رسم می‌کنیم .

ط - تغییرات تابع‌خطی $y=ax+b$ با استفاده از مشتق

۴۱- مشتق تابع $(y'=a)$ مساوی مقدار ثابت a است و علامتش همواره یکی است .

اگر $a>0$ باشد، تابع $y=ax+b$ همواره صعودی است و اگر

$a<0$ باشد ، این تابع نزولی است .

اگر $a=0$ باشد ، مشتق‌صفر و تابع همواره برابر مقدارثابت b می‌باشدوخط نمایش تغییرات آن با $x'x$ موازی و درحالت خاص $b=0$ بر آن منطبق است .

اگر x بینهایت باشد، y بینهایت است وعلامت آن همان علامت ax می‌باشد. جدول تغییرات تابع خطی به‌یکی‌از دوصورت زیر است :

$a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y'			−		
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

$a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y'			+		
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

نتایج فوق را قبلاً هم بدون استفاده از مشتق دیده‌ایم (شماره‌های ۴۰ تا ۴۳ فصل دوم) .

ی - تغییرات تابع $y=ax^2$ و رسم منحنی نمایش آن

۴۲ - مثال ۱- تابع $y=x^2$ به‌ازای‌جمیع مقادیر x معین‌است؛ زیرا به‌ازای جمیع مقادیر x می‌توان x^2 و درنتیجه y را حساب کرد .

مشتق تابع عبارت است از : $y'=2x$

وقتی‌که x منفی باشد، مشتق منفی است و وقتی که x مثبت‌باشد، مشتق مثبت می‌باشد؛ پس تابع $y=x^2$ در فاصلهٔ (۰ و $-\infty$) نزولی‌و در فاصلهٔ (۰ و $+\infty$) صعودی است .

مقادیر خاص ـ اولاً به‌ازای $x=0$ تابع y صفر است و به‌ازای $x\neq 0$ مثبت است ؛ به ازای دو مقدار متقابل $-\alpha$ و α که به x نسبت داده شود ، برای y مقدار واحد α^2 بدست می‌آید . ثانیاً وقتی که $|x|$ بینهایت ترقی کند ، y نیز ترقی می‌کند ؛ مثلاً برای آنکه $y>10^{2n}$ باشد ، کافی است که $|x|>10^n$ اختیار شود .

جدول تغییرات ـ جدول زیر ، تغییرات تابع را نشان می‌دهد:

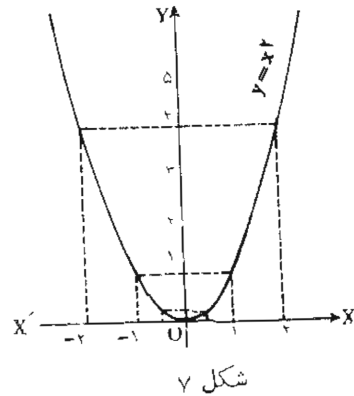
x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
$y=x^2$	$+\infty$	↘	۰ مینیمم	↗	$+\infty$

وقتی که x از $-\infty$ تا صفر ترقی کند، y از $+\infty$ تا صفر تنزل می‌کند و چون x از صفر تا $+\infty$ ترقی کند ، y از صفر تا $+\infty$ ترقی می‌کند . به ازای $x=0$ تابع از نزول وارد در صعود می‌شود ؛ پس در این نقطه تابع دارای یك **مینیمم** است و این مینیمم مساوی صفر است.

نمایش ترسیمی تابع $y=x^2$ ـ به x اعداد مختلف نسبت‌داده y را حساب می‌کنیم :

x	۳−	۲−	۱−	۰	۱	۲	۳
y	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹

حال نقاط به‌مختصات (۹و۳−) و(۴و۲−) و...... را تعیین کرده آنهارامتوالیاً به‌هم وصل می‌کنیم، منحنی نمایش تابع $y=x^2$ بدست می‌آید که آن را **یك سهمی** می‌نامند (شکل ۷) .



شکل ۷

چنانکه ملاحظه می‌شود ، نظیر دومقدار $+\alpha$ و $-\alpha$ از x ، برای y مقدار α^2 بدست‌می‌آید و نقاط ($-\alpha$ و α^2) و(α و α^2) نسبت‌به محور $y'y$ قرینهٔ یکدیگر ند؛ پس‌محور $y'y$ محور تقارن منحنی است .

مثال ۲ ـ تغییرات و نمایش ترسیمی تابع $y=\frac{1}{4}x^2$.

چون می‌توان به‌ازای جمیع مقادیر x مقدار x^2 و $\frac{1}{4}x^2$ راحساب کرد ، تابع همیشه معین است .

مشتق تابع عبارت است از : $y'=\frac{1}{2}x$.

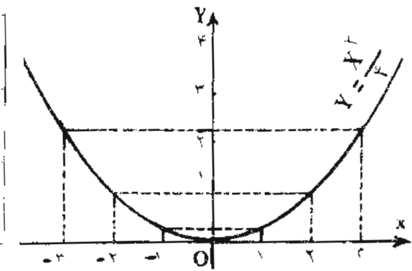
اگر به x اعداد منفی نسبت دهیم ، مشتق منفی است .

واگر به x اعداد مثبت نسبت دهیم ، مشتق مثبت است :

پس تابع در فاصلهٔ (۰و $-\infty$) نزولی و در فاصلهٔ ($+\infty$ و ۰) صعودی است . به‌ازای $x=0$ داریم $y=0$ و چون $|x|$ بینهایت شود، y هم بینهایت می‌شود.زیرا مثلاً برای آنکه $y>10^{2n}$ شود،کافی است

که $|x| > 2\times 10^n$ اختیار شود. پس داریم :

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y'	−	۰	+
$y=\frac{1}{4}x^2$	$+\infty$ ↘	۰ مینیمم	↗ $+\infty$



شکل ۸

تابع در نقطهٔ $x=0$ دارای یك مینیمم مساوی صفر است. عملا برای رسم منحنی باید به x اعداد مختلف نسبت داد ومقادیر نظیر y را معین کرد

x	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
y	$\frac{9}{4}$	۱	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{9}{4}$

ومنحنی را مثل حالت قبل رسم کرد (شکل ۸). از روی این منحنی بآسانی دیده می‌شود که باز هم به‌ازای دو مقدار متقابل $\pm\alpha$ که به x نسبت داده شود، دو نقطهٔ $M(\alpha, \frac{\alpha^2}{4})$ و $M'(-\alpha, \frac{\alpha^2}{4})$ ازمنحنی که نسبت به محور oy قرینهٔ یکدیگرند، حاصل می‌شود؛ پس محور y'y محور تقارن منحنی است.

مثال ۳ـ تغییرات ونمایش ترسیمی تابع $y=-2x^2$.

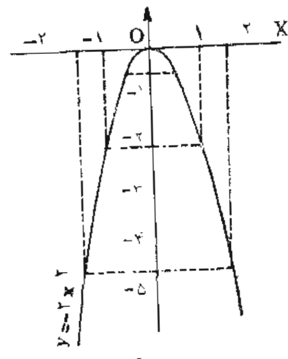
این تابع همواره معین است و $y'=-4x$.

پس به ازای $x>0$ تابع نزولی وبه‌ازای $x<0$ صعودی است.

وقتی که $|x|$ بینهایت شود، x^2 هم بینهایت می‌شود و $y=-2x^2$

به سمت $-\infty$ میل می‌کند پس داریم :

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y'	+	۰	−
y	$-\infty$ ↗	۰ ماکزیمم	↘ $-\infty$



شکل ۹

چنانکه ملاحظه می‌شود، در نقطهٔ $x=0$ تابع ازحالت صعودی به نزولی تبدیل می‌شود ودارای **ماکزیمم** است؛ وچون $y=0$ است؛ مقدار این ماکزیمم صفر می‌باشد. برای اینکه منحنی را رسم کنیم، به x اعداد مختلف نسبت داده مقادیر y را حساب می‌کنیم :

x	..... $-\frac{3}{2}$	−۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$
y	..... $-\frac{9}{2}$	−۲	$-\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	−۲	$-\frac{9}{2}$

ونقاط $(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2})$ و $(-1, -2)$ و غیره را معین کرده منحنی را رسم می‌کنیم (شکل ۹).

در اینجا نیز با استدلالی مشابه استدلالهای سابق، معلوم می‌شود که محور y'y محور تقارن منحنی است.

۴۳ ـ حالت کلی ـ تغییرات تابع $y=ax^2$ ـ تابع $y=ax^2$ به ازای جمیع مقادیر x معین است. اگر $x=0$ باشد، $y=0$؛ و چون x بینهایت شود، x^2 نیز بینهایت می‌شود و حاصل ضرب

$y=ax^2$ نیز بینهایت می‌شود . در مواردی که y صفر نیست ، علامت آن همان علامت a است و به ازای دو مقدار $+\alpha$ و $-\alpha$ که به x نسبت داده شود، برای y مقدار مشترك $a\alpha^2$ حاصل می‌شود . مشتق تابع عبارت است از $y'=2ax$.

علامت این مشتق ، به ازای‌مقادیر مثبت x همان علامت a است و به ازای مقادیر منفی x با علامت a مخالف می‌باشد ؛ پس داریم :

$a>0$	x	$-\infty$		0		$+\infty$
	y'		$-$	0	$+$	
	y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$a<0$	x	$-\infty$		0		$+\infty$
	y'		$+$	0	$-$	
	y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

حالت اول ، $a>0$: چون x از $-\infty$ تا صفر ترقی کند ، y از $+\infty$ تا مقدار مینیمم صفر نزول می‌کند ؛ و چون x از صفر تا $+\infty$ صعودکند ، y از 0 تا $+\infty$ صعود می‌کند .

حالت دوم ، $a<0$: چون x از $-\infty$ تا صفر ترقی کند، y از $-\infty$ تا ماکزیمم صفرصعود می‌کند ؛ و چون x ازصفر تا $+\infty$ ترقی کند ، y از صفر تا $-\infty$ نزول می‌کند .

۴۴ـ نمایش ترسیمی ـ منحنی تغییرات تابع $y=ax^2$ در حقیقت همان منحنی تابع $y=x^2$ یعنی **یك سهمی** است ؛ زیرا رابطهٔ $y=ax^2$ را می‌توان چنین نوشت : $ay=a^2x^2$، و چون فرض کنیم که $ay=Y$ و $ax=X$ باشد (یعنی در واقع واحد اندازه‌گیری طولها را روی دو محور a برابر کوچك کنیم بطوری که اندازه‌ها a برابر

بزرگ‌شوند)، حاصل‌می‌شود $Y=X^2$ ، وچنانکه دیدیم، نمایش‌این تابع یك منحنی است‌که‌آن را سهمی می‌نامند . محور $y'y$ محور تقارن‌این منحنی است .

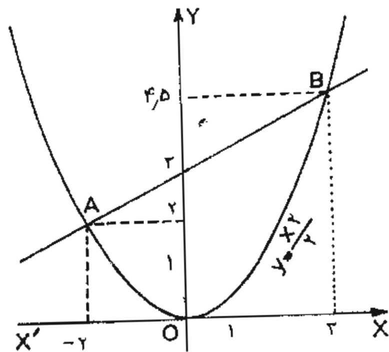
۴۵ـ فصل مشترك خط راست و سهمی ـ مثال‌ـ مطلوب است تعیین‌مختصات نقاط تقاطع خط $y=\frac{x}{2}+3$ با سهمی $y=\frac{x^2}{2}$.

چنانکه می‌دانیم ، برای تعیین این نقاط باید دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{2} \\ y=\frac{x}{2}+3 \end{cases}$$

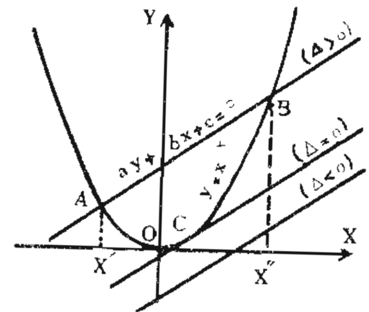
را حل کرد . از حذف y حاصل می‌شود:

$x^2-x-6=0$ یا $x=-2$ و $+3$ و برای y مقادیر ۲ و ۴/۵ حاصل می‌شود ؛ پس نقاط تقاطع عبارتند از : $A(-2\ ,\ +2)$ و $B(+3\ ,\ 4/5)$ (شکل ۱۰) .



شکل ۱۰

۴۶ـ حل ترسیمی معادلهٔ درجهٔ دومـ اگر بخواهیم فصل مشترك منحنی $y=x^2$ را با خط $ay+bx+c=0$ تعیین کنیم، کافی



شکل ۱۱

است که در معادلهٔ اخیر ، به جای y مقدار x^2 را قرار دهیم ؛ طول نقاط تقاطع از معادله $ax^2+bx+c=0$ بدست می‌آید . پس می‌توان برای حل این معادله، خط و منحنی مزبور را بدقت رسم کرد و طولهای نقاط تقاطع را اندازه گرفت تا جوابهای معادله حاصل شود .

بحث ـ اگر $\Delta=b^2-4ac$ باشد، سه حالت ممکن است داشته باشد:

$\Delta>0$ ، دراین‌صورت، خط منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند(شکل ۱۱).

$\Delta<0$ ، خط منحنی را قطع نمی‌کند.

$\Delta=0$ ، خط بر منحنی مماس است .

تمرین و مسئله

منحنی نمایش تغییرات توابع زیر را رسم کنید :

۱- $y=\frac{x^2}{3}$ ۲- $y=-\frac{x^2}{2}$

۳- $y=\frac{3}{4}x^2$ ۴- $y=\frac{3}{2}x^2$

۵- $y=-\frac{5}{3}x^2$ ۶- $y=-\frac{5}{4}x^2$

۷- $y=5x^2$ ۸- $y=-3x^2$

۹- a را چنان معین کنید که منحنی $y=ax^2$ از نقطهٔ $A(3 , -4/5)$ بگذرد و سپس این منحنی را رسم کنید .

دستگاههای معادلات زیر را از راه ترسیم حل کنید :

۱۰- $\begin{cases} y=2x^2 \\ y=5x+7 \end{cases}$

۱۱- $\begin{cases} y=\frac{x^2}{3} \\ y=\frac{x}{3}+2 \end{cases}$

۱۲- $\begin{cases} y=-\frac{x^2}{2} \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$

ك ـ تغییرات تابع $y=ax^2+bx+c$

۴۸ـ مثال ۱ ـ مطلوب است بحث در تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $y=x^2-2x-3$.

x هرچه باشد، همواره می‌توان y را حساب کرد ، پس تابع مفروض معین است . مشتق تابع عبارت است از : $y'=2x-2=2(x-1)$.

واضح است که بازای $x<1$ داریم : $y'<0$ و تابع نزولی است و به ازای $x>1$ داریم : $y'>0$ و تابع صعودی است.

به ازای $x=1$ داریم: $y=f(1)=-4$

بازای $x\neq 0$ می‌توان نوشت : $y=x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})$

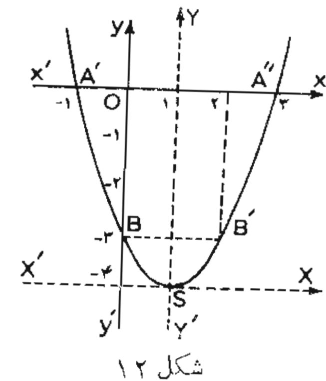
وچون $|x|$ به سمت ∞ میل کند، مقدارداخل پرانتز بسمت یك و y مانند x^2 بسمت $+\infty$ میل می‌کند، پس جدول تغییرات زیر را داریم:

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

پس اگر x از $-\infty$ تا ۱ ترقی کند ، y از $+\infty$ تا -۴ تنزل می‌کند و چون x از ۱ تا $+\infty$ ترقی کند ، y از -۴ تا $+\infty$ ترقی می‌کند .

تابع به ازای $x=۱$ دارای مینیممی است مساوی با -۴ .

به ازای $x=۰$ داریم $y=-۳$ و از طرف دیگر y صفر است اگر $x^۲-۲x-۳=۰$ یعنی ۳ و $x=-۱$ باشد، پس برای رسم منحنی درصفحهٔ دومحورعمود برهم $x'x$ و $y'y$ (شکل ۱۲) نقاط $S(۱ ,-۴)$ و $A'(-۱ , ۰)$ و $B(۰ , -۳)$ و $B'(۲ , -۳)$ و $A''(۳ , ۰)$ وغیره را رسم‌کرده تمام این نقاط را به‌وسیلهٔ یك منحنی متصل به‌هم وصل می‌کنیم و منحنی تغییرات تابع $y=x^۲-۲x-۳$ بدست می‌آید .



شکل ۱۲

صورت سادهٔ معادلهٔ منحنی- از نقطهٔ $S(۱ , -۴)$ محورهای $X'X$ و $Y'Y$ را بترتیب موازی با $x'x$ و $y'y$ و متحدالجهت با آنها رسم می‌کنیم . طبق دستورهای تغییر دو محور مختصات (شمارهٔ ۱۹ فصل دوم) مابین مختصات جدید و قدیم هرنقطه رابطهٔ زیر برقرار است :

$$x=۱+X \qquad \text{و} \qquad y=-۴+Y$$

و معادلهٔ منحنی نسبت به محورهای جدید چنین می‌شود :

$$-۴+Y=(۱+X)^۲-۲(۱+X)-۳$$

یا $Y=X^۲$ از اینجا معلوم می‌شود که منحنی فوق نیز یك سهمی است

که خط SY محور تقارن آن است .

مثال ۲- بحث در تغییرات و رسم منحنی تابع :

$$y=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۱$$

چون به‌ازای هرمقدار x می‌توان y را حساب‌کرد ، تابع مفروض همیشه معین است .

مشتق تابع عبارت است از $y'=-x+۲$.

و این مشتق به ازای $x>۲$ منفی و به ازای $x<۲$ مثبت است و تابع به‌ازای $x<۲$ صعودی و به ازای $x>۲$ نزولی است .

جدول تغییرات تابع به صورت زیر است :

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	↗	۳	↘	$-\infty$

وقتی که x از $-\infty$ تا ۲ ترقی کند ، y از $-\infty$ تا $+۳$ ترقی می‌کند و چون x از $+۲$ تا $+\infty$ ترقی کند ، y از $+۳$ تا $-\infty$ تنزل می‌کند ، پس تابع y به‌ازای $x=۲$ دارای **یك ماکزیمم** مساوی با ۳ است .

گذشته از اینها ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $x=۰$ داریم $y=۱$ ونیز $y=۰$ است اگر $x=۲\pm\sqrt{۶}$ باشد .

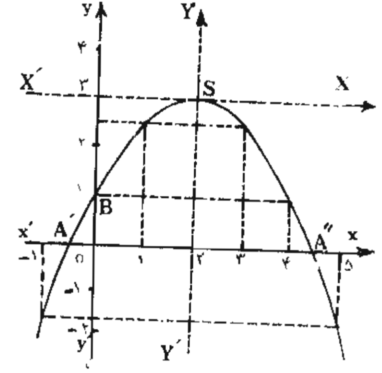
نمایش ترسیمی- در صفحهٔ دو محور عمود بر هم مختصات

(شکل ۱۳) نقاط $S(2, 3)$ ، $B(0, 1)$ ، $A'(2-\sqrt{6}, 0)$ و $A''(2+\sqrt{6}, 0)$ و سپس چند نقطهٔ دیگر نظیر مقادیر مختلف x بدست می‌آوریم مثل :

$$(1, \frac{5}{2}) ، (3, \frac{5}{2}) ، (-1, -\frac{3}{2}) ، (4, 1) \text{ و } \dots$$

این نقاط را به وسیلهٔ یك منحنی اتصالی به هم وصل می‌کنیم و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$ حاصل می‌شود .

از شکل منحنی و اعدادی که برای ترسیم آن بکاررفته بسهولت معلوم می‌شود که خط $x=2$ محور تقارن منحنی است . در واقع اگر دو مقدار $2+\alpha$ و $2-\alpha$ را به x نسبت دهیم در هر دو حال برای y مقدار $(-\frac{1}{2}\alpha^2+3)$ حاصل می‌شود



شکل ۱۳

صورت سادهٔ معادلهٔ منحنی – مثل مسئلهٔ قبل اگر خطوط SX و SY را محورهای جدید اختیار کنیم ، مابین مختصات قدیم و جدید رابطهٔ $x=2+X$ و $y=3+Y$ یا $X=x-2$ و $Y=y-3$ وجود دارد ومعادلهٔ منحنی بصورت $Y=-\frac{1}{2}X^2$ درمی‌آید و به این‌صورت معلوم می‌شود که این منحنی نیز یك سهمی است ، یعنی سهمی

$y=-\frac{1}{2}x^2$ است که انتقال یافته است .

۴۹ – بحث درحالت کلی تابع $y=ax^2+bx+c$ – تابع به ازای جمیع مقادیر x معین است. برای بحث در تغییرات تابع مشتق آن را حساب می‌کنیم :

$y'=2ax+b$ این مشتق بهازای $x=-\frac{b}{2a}$ صفر می‌شود .

اگر $x<-\frac{b}{2a}$ باشد ، علامت y' مخالف علامت a است .

و اگر $x>-\frac{b}{2a}$ باشد، علامت y' موافق علامت a است .

به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}$ داریم :

$$y=f(-\frac{b}{2a})=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

از طرف دیگر $y=ax^2(1+\frac{b}{ax}+\frac{c}{ax^2})$ و چون $|x|$ بینهایت شود ، پرانتز به سمت ۱ میل می‌کند و y مانند ax^2 به سمت بینهایت میل می‌کند . از اینجا دو جدول حاصل می شود :

	x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$a>0$	y'		$-$	0	$+$	
	y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$

a<۰	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
	y'	+	۰	−
	y	$-\infty \nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow -\infty$

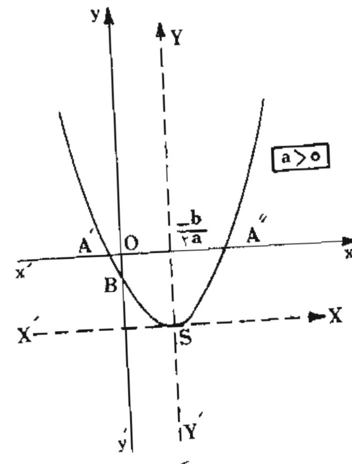
۵۰ ـ نتیجه ـ اولا $a>0$: وقتی که x از $-\infty$ تا $\frac{-b}{2a}$ وسپس از $-\frac{b}{2a}$ تا $+\infty$ ترقی کند، تابع $y=ax^2+bx+c$ از مقدار $+\infty$ تا مقدار مینیمم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ تنزل کرده سپس تا $+\infty$ ترقی می‌کند.

ثانیاً $a<0$: چون x از $-\infty$ تا $\frac{-b}{2a}$ و سپس از $\frac{-b}{2a}$ تا $+\infty$ ترقی‌کند، تابع $y=ax^2+bx+c$ از $-\infty$ تا مقدار ماکزیمم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ترقی کرده سپس تا $-\infty$ تنزل می‌کند.

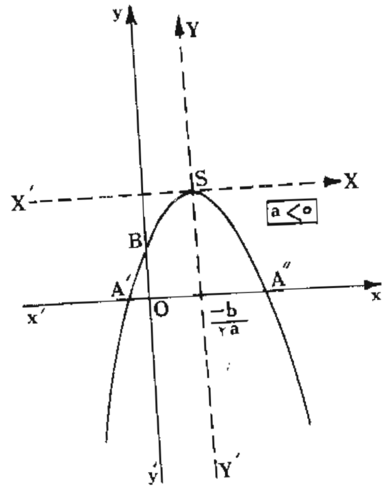
۵۱ـ نمایش ترسیمی ـ نقطهٔ $S(\frac{-b}{2a}$ و $\frac{4ac-b^2}{4a})$ را معین کرده منحنی تابع $y=ax^2+bx+c$ را می‌کشیم. حال اگر محور‌های جدید $X'X$ و $Y'Y$ به‌مبدأ S را بکشیم، دستورهای تغییر دومحور مختصات عبارتند از:

$$x=-\frac{b}{2a}+X \quad \text{و} \quad y=\frac{4ac-b^2}{4a}+Y$$

چون این مقادیر را در رابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ بگذاریم پس از اختصار حاصل می‌شود $Y=aX^2$ و از اینجا معلوم می‌شود که منحنی تغییرات تابع y یك سهمی است که از انتقال سهمی $y=ax^2$ حاصل می‌شود، بطوری که نقطهٔ واقع بر مبدأ مختصات در نقطهٔ $S(\frac{-b}{2a}$ و $\frac{4ac-b^2}{4a})$ واقع می‌شود. اگر $a>0$ باشد، تقعر منحنی به سمت y های مثبت است و اگر $a<0$ باشد، تقعر منحنی بسمت y های منفی است. باید در نظر داشت



شکل ۱۴

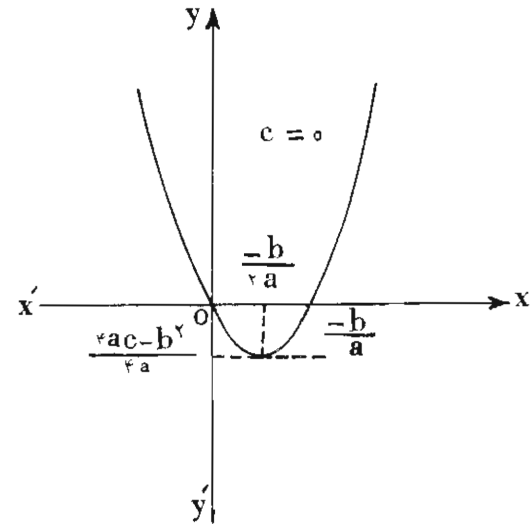


شکل ۱۵

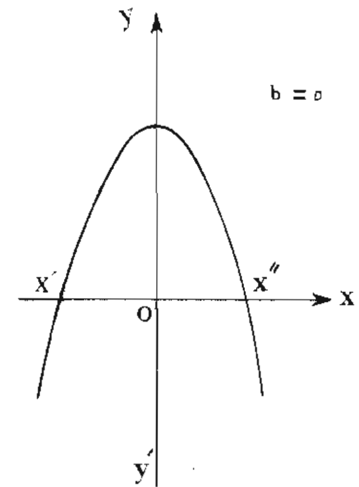
که منحنی همواره محور y ها را در نقطهٔ $B(0$ و $c)$ قطع می‌کند و اگر $b^2-4ac>0$ باشد، محور x ها را در دو نقطهٔ A' و A'' قطع می‌کند که طولهای آنها x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ می‌باشند.

۵۲ ـ حالات مخصوص ـ حالت اول ـ $c=0$ منحنی تابع

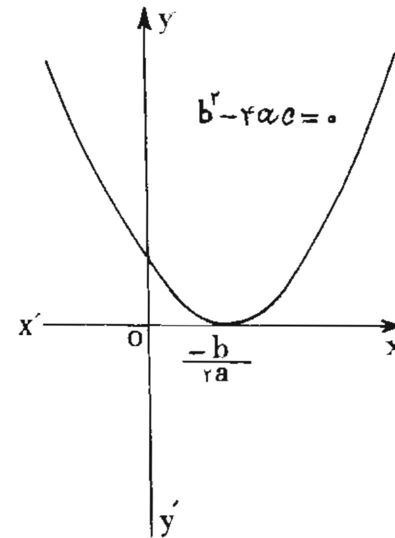
$y=ax^{2}+bx$ از مبدأ می‌گذرد (شکل ۱۶) .



شکل ۱۶



شکل ۱۷



شکل ۱۸

حالت دوم ـ $b=0$ محور $y'y$ محور تقارن منحنی تابع

$y=ax^{2}+c$ است (شکل ۱۷) .

حالت سوم ـ $b^{2}-4ac=0$ منحنی تابع $y=ax^{2}+bx+c$ در نقطهٔ به طول $-\frac{b}{2a}$ با محور $x'x$ مماس می‌باشد (شکل ۱۸).

۵۳ ـ فصل مشترك يك خط و يك سهمی ـ فرض کنیم سهمی $y=ax^{2}+bx+c$ وخط $y=mx+p$ را نسبت به يك دستگاه محور-های مختصات رسم کرده باشیم (شکل ۱۹) . طولهای نقاط تقاطع عبارتند از

ریشه‌های معادلهٔ :
$$ax^{2}+bx+c=mx+p$$

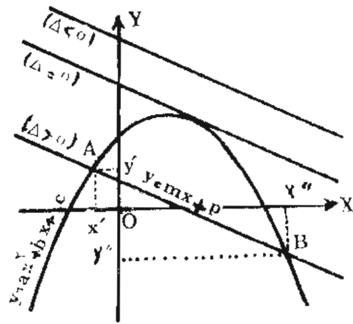
یا :
$$ax^{2}+(b-m)x+c-p=0$$

این معادله از درجهٔ دوم است و داریم :

$$\Delta=(b-m)^{2}-4a(c-p)$$

از اینجا نتیجه می‌شود :

بر حسب اینکه Δ مثبت یا صفر یا منفی باشد، خط منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند یا با آن مماس است یا آن را قطع نمی‌کند .



شکل ۱۹

۵۴ ـ مسئله ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=x^{2}+x-6$ در نقطه‌ای که طول آن $x=1$ است .

روش اول ـ عرض نقطه‌ای که طول آن ۱ است ، ۴ − می‌باشد.

حال خطی به معادلهٔ $y=ax+b$ را در نظر می‌گیریم برای اینکه این خط از نقطهٔ (۴ − و ۱) بگذرد باید $a+b=-4$ باشد یا :

$b=-a-4$، پس معادلهٔ چنین خطی عبارت است از: $y=ax-a-4$،
وطولهای نقاط تقاطع این خط بامنحنی فوق ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند:

$$x^2+x-6=a(x-1)-4$$

یا:

$$x^2+x(1-a)+a-2=0$$

اگر این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، خط با منحنی مماس می‌شود، پس دراین حالت داریم:

$$\Delta=a^2-6a+9=0 \quad \text{یا} \quad a=3 \quad \text{و} \quad b=-7$$

ومعادلهٔ خط مماس مطلوب عبارت است از: $y=3x-7$

روش دومـ طبق آنچه درشمارهٔ ۱۴ فصل سوم گفتیم ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی $y=x^2+x-6$ درهر نقطه عبارت است ازمقدارمشتق به ازای طول آن نقطه، اما $y'=2x+1$. پس ضریب زاویه‌ای مماس در نقطهٔ به طول $x=1$ عبارت است از ۳ و معادلهٔ این مماس عبارت است از:

$$y+4=3(x-1) \quad \text{یا} \quad y=3x-7$$

تمرین ومسئله

جدول تغییرات و منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید:

۱- $y=1-x^2$ ۲- $y=1+x^2$

۳- $y=x^2-4$ ۴- $y=9x^2-4$

۵- $y=-4x^2+25$ ۶- $y=x^2+x$

۷- $y=2x^2-3x+1$ ۸- $y=x-x^2$

۹- $y=(x-2)^2-4$ ۱۰- $y=2x^2-x-3$

۱۱- $y=4x-5x^2$ ۱۲- $y=2-(x-1)^2$

۱۳- $y=-x^2+5x+14$ ۱۴- $y=-\frac{x^2}{2}+x+4$

۱۵- $y=-\frac{x^2}{2}+x+6$ ۱۶- $y=-5(x-1)^2$

۱۷- $y=x^2+x+1$ ۱۸- $y=-3x^2-x+4$

۱۹- $y=7x^2-x-6$ ۲۰- $y=x^2+5x-14$

دستگاههای زیر را ازراه ترسیم حل کنید وصحت نتیجه را به وسیلهٔ محاسبه تحقیق کنید:

۲۱- $\begin{cases}4x-y-\frac{1}{2}=0\\(x+3)(x-5)+2y=0\end{cases}$

۲۲- $\begin{cases}x^2+2(x+y)+5=0\\3x+2y+11=0\end{cases}$

۲۳- $\begin{cases}3(x+y)+4=0\\x^2-2x+3y-10=0\end{cases}$

۲۴- $\begin{cases}3x+y+2=0\\3x^2-2(x-y)+8=0\end{cases}$

۲۵- اولا بر حسب مقادیر m در عدهٔ نقاط تقاطع منحنی $y=x^2$ و خط $y=2x+m$ بحث کنید ومعین کنیدکه به ازای چه مقادیری از m خط با منحنی مماس است. ثانیاً m را طوری معین کنید که طول یك نقطهٔ تقاطع ۱- یا ۲+ باشد و خطوط نظیر آنها را رسم کنید و مختصات نقطهٔ دیگر تقاطع را بدست آورید.

۲۶- منحنی $y=\frac{x^2}{4}$ و خط $y=m\left(x-\frac{3}{2}\right)-1$ مفروضند. اولا

ثابت کنید که این خط همواره از یك نقطهٔ ثابت S می‌گذرد. ثانیاً برحسب مقادیر m در عدهٔ نقاط تقاطع منحنی و خط بحث کنید و معادلهٔ خطوط مماسی را که می‌توان از S برمنحنی رسم کرد بنویسید. ثالثاً اگر نقاط تماس را A و B بنامیم، نقطهٔ F محل تقاطع AB را با محور oy معین کرده معادلهٔ خط SF را بنویسید و ثابت کنید خط SF بر AB عمود است.

۲۷ـ منحنی تغییرات تابع $y=-\frac{1}{2}x^2$ را رسم کنید و معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که دو ریشهٔ آن x' و x'' طولهای نقاط تقاطع خط $y=x+p$ با منحنی باشند. اگر نقاط تقاطع را M' و M'' بنامیم، مکان وسط وتر $M'M''$ را وقتی که p تغییر کند معین کنید. اگر $p=\frac{1}{2}$ باشد، وضع خط را نسبت به منحنی معین کنید.

۲۸ـ منحنی تغییرات تابع $y=x^2+x-12$ را رسم کنید ونقاط تقاطع آن را با خط $y=x-3$ پیدا کنید.

۲۹ـ مسئلهٔ قبل را برای منحنی $y=-x^2+2x-2$ وخط $y=\frac{x}{2}+1$ حل کنید.

۳۰ـ در عدهٔ نقاط تقاطع خط $y=m$ با منحنی $y=x(x-2)$ برحسب مقادیر m بحث کنید.

۳۱ـ a را چنان معین کنید که خط $y=ax+2$ بامنحنی $y=2x^2+x+\frac{5}{2}$ مماس شود و مختصات نقطهٔ تماس را بدست آورید.

۳۲ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=(2x-3)^2$ در نقطه‌ای از آن‌که طولش ۱ است.

۳۳ـ منحنی $y=x^2-1$ را رسم کرده نقطه‌ای از منحنی را معین کنید که خط مماس در آن با محور ox زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

۳۴ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ مماسی از منحنی $y=x^2+2x$ که با نیمساز زاویهٔ xoy موازی باشد. مختصات نقطهٔ تماس را حساب کنید.

۳۵ـ منحنی $y=x^2-mx+1$ مفروض است. اولا m را طوری معین کنید که منحنی برمحور ox مماس باشد. ثانیاً بازای این مقدار m منحنی را رسم کنید.

۳۶ـ تابع $y=x^2-(m-1)x+m$ مفروض است. مطلوب است تعیین m بقسمی که عرض نقطهٔ مینیمم منحنی تغییرات این تابع مساوی یك باشد و پس از تعیین m منحنی را رسم کنید.

۳۷ـ a و b را چنان معین کنید که خط $y=ax+b$ در نقطهٔ به طول ۲ با منحنی $y=-x^2+3x$ مماس شود و مختصات نقطهٔ تماس را بدست آورید.

۳۸ـ جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{1}{4}(x^2-2x+5)$ را رسم کنید و معادلات مماسهایی را که از مبدأ مختصات می‌توان براین منحنی رسم کرد بنویسید و ثابت کنید که این مماسها بر هم عمودند.

۳۹ـ اولا منحنی $y=x^2-x+1$ وخط $y=\frac{3}{2}x$ را رسم کنید و مختصات نقاط تقاطع آنها را پیدا کنید. ثانیاً برحسب مقادیر m در عدهٔ نقاط تقاطع خط $y=mx$ با منحنی بحث کنید وازروی آن مختصات نقاط تماس مماسهایی را که می‌توان از مبدأ مختصات بر این منحنی رسم کرد بنویسید.

۴۰ـ اولا منحنی تغییرات تابع $y=-\frac{x^2}{4}+x+1$ را رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید که هر نقطهٔ $M(x,y)$ ازمنحنی از نقطهٔ $A(x=2 \text{ و } y=1)$ وخط $y=3$ به یك فاصله است. ثالثاً از نقطهٔ $B(x=-1 \text{ و } y=0)$ خطی با ضریب زاویه‌ای m رسم کنید و در عدهٔ نقاط تقاطع این خط با منحنی بحث کنید.

۴۱ـ اولا منحنی تغییرات تابع $y=x^2-6x+5$ را رسم کنید. ثانیاً مختصات نقاط تقاطع این‌منحنی را با نیمسازهای زوایای دومحورمعین‌کنید. ثالثاً مختصات نقاط تقاطع منحنی راباخطی‌که‌از مبدأ بگذرد و با ox زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد معین‌کنید.

۴۲ـ اولا در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ زیر بحث‌کنید:

$$x^2-2(m+1)x+m^2-4m+1=0$$

ثانیاً وقتی که m تغییر کند، تغییرات مجموع دو ریشه S و حاصل‌ضرب دو ریشه P را بدست آورید و منحنی این تغییرات را رسم کنید. آیا می‌توان از این دومنحنی برای‌بحث قسمت اول استفاده‌کرد؟ ثالثاً تغییرات مجموع مجذورات دو ریشه را معین‌کرده منحنی آن را رسم کنید.

۴۳ـ منحنی تابع $y=x^2+x+5$ را رسم کنید. ثابت کنید که از نقطهٔ به عرض ۲ − واقع برمحور Oy می‌توان دو مماس براین منحنی رسم کرد و معادلات خطوط مماس و مختصات نقاط تماس و معادلهٔ خط واصل مابین نقاط تماس را بنویسید.

۴۴ـ مطلوب است تعیین a بقسمی‌که منحنی تغییرات تابع: $y=(x-a)^2-\frac{9}{4}$ محور Oy را درنقطه‌ای قطع کندکه مماس بر منحنی در آن نقطه با محور y'y زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد. به ازای این مقدار a منحنی را رسم کنید.

۴۵ـ تابع $y=-x^2-4x+12$ مفروض است. اولا منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم‌کنید. ثانیاً روی محور y'y نقطه‌ای تعیین کنید که اگر از آن نقطه دومماس بر این منحنی رسم کنیم، مماسهای مزبور بر هم عمود باشند و معادلات خطوط مماس را معین کنید.

۴۶ـ تابع $y=2x^2+px+q$ مفروض است. p و q را چنان معین کنید که منحنی تغییرات تابع از نقطهٔ A(۲ و ۳) بگذرد و ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی در این نقطه ۵ باشد و به ازای این مقدار p و q منحنی

را رسم کنید.

۴۷ـ ثابت کنید که منحنی تغییرات تابع $y=m(x-1)^2+x$ به ازای جمیع مقادیر m از یك نقطهٔ ثابت می‌گذرد و در این نقطه با یك خط ثابت مماس است. این نقطه و خط را معین کرده به ازای جمیع مقادیر مختلف m وضع منحنی را مشخص‌کنید.

۴۸ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است. اولا a ، b و c را چنان معین کنیدکه منحنی ازنقاط A (۱۸ و ۲) و B(−۳ و −۱۲) بگذرد و در نقطهٔ $x=-\frac{3}{2}$ دارای مینیمم‌باشد. ثانیاً منحنی تابع راباشرایط فوق رسم کنید. ثالثاً در عدهٔ نقاط تقاطع خط $y=mx-15$ با منحنی بحث‌کنید. رابعاً اگرنقاط‌تقاطع‌را A و B بنامیم‌مکان هندسی وسط قطعه‌خط AB را وقتی‌که m تغییر کند معین‌کرده این مکان را رسم کنید.

۴۹ـ تابع $y=ax^2+x-2$ مفروض است. ثابت کنیدکه منحنی تغییرات آن محور y'y را در نقطهٔ ثابتی قطع می‌کند و در این نقطهٔ ثابت بر خط ثابتی مماس است. ثانیاً مختصات نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم این منحنی را بدست‌آورده مکان هندسی آن را وقتی‌که a تغییر کند معین‌کنید. ثالثاً a را چنان معین‌کنیدکه طول نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم برابر عرض آن باشد و در این حالت منحنی را رسم‌کنید.

۵۰ـ اولا تغییرات تابع $y=\frac{1}{4}(3-x)(x+5)$ را معین‌کرده منحنی نمایش آن (C) را رسم کنید (فرض می‌کنیم‌که A نقطهٔ تقاطع این منحنی با محور Oy باشد). ثانیاً در عدهٔ نقاط تقاطع خط D به معادلهٔ $y=-\frac{1}{2}x+h$ با منحنی وقتی‌که h تغییرکندبحث کنید (فرض می‌کنیم M و M' نقاط تقاطع خط ومنحنی‌باشند)، مکان‌هندسی نقطهٔ P وسط قطعه‌

خط MM' را وقتی که h تغییر کند معین کنید . ثالثاً خط (Δ) به معادلهٔ $y=mx+5$ را در نظر می‌گیریم . ثابت‌کنیدکه چون m تغییر کند، این خط از یك نقطهٔ ثابت B عبور می‌کند و سپس در عدهٔ نقاط تقاطع این خط با منحنی بحث کنید و ازآنجا نتیجه‌بگیریدکه از نقطهٔ B همواره می‌توان‌دو مماس بر منحنی (C) رسم‌کرد و ثابت کنید که این مماسها برهم عمودند و مختصات نقطهٔ تماس آنها T_1 و T_2 را بدست آورید و ثابت کنیدکه نقطهٔ I وسط قطعه‌خط T_1T_2 یك نقطه از مکانی است‌که در قسمت دوم یافتیم و این نقطه قرینهٔ B نسبت به A می‌باشد وبالاخره معادلهٔ خطی را که ازنقاط T_1 و T_2 می‌گذرد بنویسید .

۵۱ ـ اولا بر حسب مقادیر a در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ $(a-2)x^2-2x+(a-2)=0$ بحث کنید .
ثانیاً تابع $y=(a-2)x^2-2x+(a-2)$ را در نظر می‌گیریم. a راچنان معین‌کنیدکه این تابع یك مینیمم y داشته باشدبطوری‌که $y=3x$ باشد و منحنی نمایش تغییرات‌تابع را بهازای مقدار مثبت aکه حاصل‌می‌شود رسم‌کنید . ثالثاً اگر به a عدد فوق‌الذکر را نسبت دهیم در عدهٔ نقاط‌تقاطع منحنی مرسوم با خط $y=3x+m$ بحث‌کنید .

۵۲ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است . a ، b و c راچنان تعیین کنید که منحنی از نقاط $A(-4 , 0)$ و $B(0 , -2)$ بگذرد و عرض نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم آن $-\frac{25}{8}$ باشد. ثانیاًمنحنی تغییرات‌تابع را رسم کنید . ثالثاً معادلهٔ خط مماس درنقاط A و B و مختصات نقطهٔK محل تقاطع این مماسها را بدست آورید. رابعاً از نقطهٔ K خطی با ضریب زاویه‌ای m رسم‌می‌کنیم، در عدهٔ نقاط تقاطع آن بامنحنی بحث‌کنید.ثابت کنیدکه بین طولهای نقاط تقاطع رابطه‌ای مستقل از m وجود دارد . خامساً اگر $x'=2x''$ باشد ، طولهای نقاط تقاطع و m را حساب‌کنید .

۵۳ـ تابع $y=ax^2+2(a+1)x+4$ مفروض است . اولا a را

طوری معین کنید که منحنی با محور $x'x$ مماس باشد . ثانیاً a را طوری معین کنیدکه محور $y'y$ محور تقارن منحنی باشد . ثالثاً a راطوری معین کنید که منحنی تبدیل به‌خط مستقیم شود ، رابعاً a را طوری معین کنیدکه نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم روی خط $y=x-1$ واقع شود . خامساً ثابت‌کنید جمیع منحنیهایی‌که بهازای مقادیر مختلف a بدست می‌آیند از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند و معادلهٔ خط مماس بر منحنی در این دونقطه را بنویسید ومعین کنید چه رابطه‌ای مابین مختصات نقطهٔ تقاطع این دو مماس وجود دارد و a را طوری معین کنیدکه مابین مختصات این نقطه رابطهٔ $x^2+y^2=13$ برقرار باشد .

۵۴ ـ تابع $y=\frac{1}{2}(x^2+6x+m)$ مفروض‌است. اولا m راچنان معین‌کنیدکه مینیمم تابع مساوی $\frac{1}{2}$ باشد . ثانیاً به ازای $m=10$ منحنی تغییرات تابع را رسم‌کنید و مختصات نقطه‌ای از منحنی را بدست آورید که مماس آن با محور Ox زاویهٔ ۱۳۵ درجه می‌سازد . ثالثاً اگر M یك‌نقطهٔ اختیاری ازاین منحنی‌باشد وازآن‌عمود MH را برمحور xها فرودآوریم، ثابت کنید که روی خط $x=-3$ نقطه‌ای مانند F می‌توان یافت که : $MF=MH$ باشد .

۵۵ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است. اولا a ، b و c را چنان معین‌کنیدکه منحنی از نقطهٔ $M(1 , 1)$ بگذرد و مختصات نقطهٔ‌مینیمم آن $(-1 , 2)$ باشد . ثانیاً منحنی تغییرات تابع را با شرایط فوق رسم کنید . ثالثاً اگر A نقطهٔ تقاطع منحنی با محور $y'y$ و B نقطهٔ‌مینیمم‌منحنی باشد، مطلوب است تعیین نقطه‌ای از منحنی مانند C که مماس‌درآن‌با AB موازی باشد و مساحت مثلث ABC را حساب‌کنید.

۵۶ ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است.اولا a ، b و c را چنان معین‌کنیدکه منحنی در نقطهٔ $(-4 , 3)$ دارای مینیمم باشد و بر

$y=-6x+5$ مماس شود . ثانیاً به ازای مقادیر حاصل منحنی تغییرات تابع را رسم‌کنید. ثالثاً منحنی تابع $y=x^2-6x+5$ را در نظر می‌گیریم، روی خط $x=2$ نقطه‌ای معین‌کنید که اگر از آن نقطه دو مماس بر منحنی رسم‌کنیم ، این دو مماس بر هم عمود باشند ومعادلات خطوط مماس ومختصات نقاط A و B یعنی نقاط تماس را بدست آورید. رابعاً ازنقطهٔ تقاطع دومماس عمودی بر خط AB فرود می‌آوریم. مختصات نقطهٔ F پای عمود را معین کرده ثابت‌کنیدکه این نقطه روی محور تقارن منحنی واقع است . خامساً از نقطهٔ تقاطع دومماس خط D را به موازات $x'x$ رسم می‌کنیم ، ثابت‌کنید که هر یك ازنقاط منحنی از خط D ونقطهٔ F به یك فاصله هستند.

۵۷ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم $f(x)=(x-1)(3-x)-a\left(x-\frac{5}{2}\right)=0$ مفروض است . اولا ثابت‌کنید a هرچه باشد این معادله دارای دو ریشه‌است. ثانیاً a را طوری معین‌کنید که یکی از دو ریشه دوبرابر دیگری باشد و این ریشه‌ها را حساب کنید . ثالثاً منحنی تابع $y=(x-1)(3-x)$ را رسم کرده ثابت کنید که معادلهٔ درجهٔ دوم فوق نقاط تقاطع یك خط راست را بـا منحنی نشان می‌دهد و در این صورت وجود ریشه‌ها را به‌کمك منحنی ثابت کنید و نتیجهٔ قسمت دوم را نیز روی شکل تعبیرکنید.

۵۸ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم $f(x)=mx^2-(4m-3)x+4m+3=0$ مفروض است . اولا m را چنان معین‌کنیدکه دو ریشهٔ معادله متساوی باشند ونیز m را طوری معین‌کنیدکه دو ریشه عکس یکدیگرباشند ، ثانیاً به ازای این دومقدار m منحنی تابع $y=f(x)$ را رسم‌کنید. ثالثاً ثابت‌کنید که دو منحنی حاصل بریکدیگر مماسند ومختصات نقطهٔ تماس و معادلهٔ مماس مشترك دو منحنی را در این نقطه معین‌کنید .

۵۹ـ تابع $y=(m+1)x^2-4mx+m+6$ مفروض است . اولا به‌ازای چه مقادیری از m منحنی دارای ماکزیمم است و در چه‌صورت مینیمم دارد . ثانیاً m را چنان معین‌کنیدکه منحنی دارای مینیممی به‌عرض

۵ باشد . ثالثاً در این صورت دومقدار برای m حاصل می‌شود . منحنیهای نظیر آنها را رسم‌کنید . رابعاً نقاط فصل مشترك این دو منحنی وطول وتر مشترك آنها را حساب‌کنید.

ل- تغییرات تابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$

و رسم منحنی نمایش آن

۵۵ ـ تابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ راکه درآن $a'\neq 0$ فرض‌می‌شود تابع هموگرافیك می‌نامند (در صورتی که $a'=0$ باشد ، تابع خطی است) .

۵۶ـ مثال ۱ ـ ترسیم جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{1}{x}$.

الف‌ـ تابع به‌ازای جمیع مقادیر x معین وپیوسته است مگر به ازای $x=0$ ؛ وقتی که x به‌سمت صفر میل می‌کند، قدرمطلق $\frac{1}{x}$ بینهایت می‌شود واگر متغیر بامقادیر بزرگتر ازصفر به‌سمت صفر میل‌کند، تابع به‌سمت $+\infty$ واگرمتغیر با مقادیر منفی به سمت صفرمیل‌کند ، تابع به سمت $-\infty$ میل‌می‌کند(بطورخلاصه علامت تابع همان علامت x است).

ب ـ مشتق تابع یعنی $y'=\frac{-1}{x^2}$ همواره‌منفی‌است(بازای $x=0$ مشتق نامعین است) ، ولذا تابع در فواصلی‌که معین است همواره‌نزولی است .

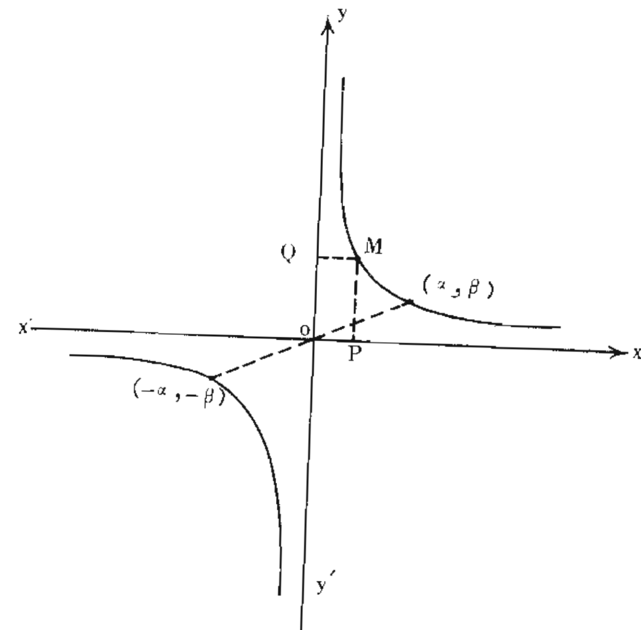
ج ـ وقتی که x به‌سمت $\pm\infty$ میل کند ، y به‌سمت صفر میل می‌کند .

جدول تغییرات تابع عبارت است از :

x	$-\infty$		$-\alpha$	$+\alpha$		$+\infty$
y'		$-$			$-$	
y	۰	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	۰

(α مقداری است مثبت وفوق‌العاده کوچك)

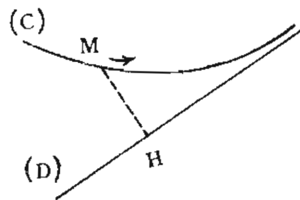
برای ترسیم منحنی نمایش تغییرات تابع به x مقادیر مختلفی مانند ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۱- ، ۲- و ۳- وغیره نسبت داده مقادیر نظیر آنها را



شکل ۲۰

برای تابع بدست می‌آوریم . از روی شکل دیده می‌شود که منحنی از دو شاخه‌تشکیل شده است . پیدایش دو شاخه به واسطهٔ این است‌که تابع به ازای $x=0$ ناپیوسته است . اگر α و β مختصات نقطه‌ای از منحنی باشند داریم : $\beta=\frac{1}{\alpha}$ یعنی : $\alpha\beta=1$ و نقطهٔ به‌مختصات : $x=-\alpha$ و $y=-\beta$ نیزروی‌منحنی‌است. زیرا : $xy=(-\alpha)\times(-\beta)=\alpha\beta=1$ بنا براین مبدأمختصات مرکز تقارن منحنی است .

تعریف مجانب ـ اگر یك منحنی دارای شاخهٔ نامحدودی باشد[1] ، گاهی ممکن است که خط راستی مانند (D) وجود داشته باشد بطوری که اگر نقطهٔ M روی شاخهٔ منحنی بینهایت دور شود ، فاصلهٔ MH آن نقطه از خط (D) ، به‌سمت‌صفر میل‌کند . دراین صورت می‌گویند



شکل ۲۱

خط (D) مجانب منحنی است (شکل ۲۱) .

خط راست (D) را مجانب شاخه‌ای از منحنی (C) می‌نامند . اگر

۱ ـ یعنی اگر نقطهٔ متحرکی مانند M روی‌شاخهٔ منحنی حرکت کند فاصلهٔ آن‌ازنقطهٔ معلومی‌مانند C بتواندبی‌اندازه بزرگ شود. (این درصورتی است که در معادلهٔ منحنی x یا y بتوانند بینهایت شوند).

وقتی کـه نقطهٔ متحرک M روی شاخهٔ مزبور بینهایت دور می‌شود، فاصلهٔ آن نقطه از (D) به‌سمت صفر میل کند.

بسهولت دیده می‌شودکه محور $x'x$ با هر دو شاخهٔ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۱}{x}$ مجانب است (شکل ۲۰). همچنین است محور $y'y$، زیرا از روی معادلهٔ منحنی $xy=۱$ دیده می‌شود که اگر y بینهایت بزرگ شود، x یعنی فاصلهٔ نقطهٔ M از محور $y'y$ صفر می‌شودواگر x بینهایت بزرگ شود، y یعنی فاصلهٔ M از محور $x'x$ صفر خواهد شد.

مثال ۴ ـ ترسیم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{x+۱}{x-۲}$$

الف ـ تابع به‌ازای جمیع مقادیر x معین وپیوسته است مگربه ازای $x=۲$ که ریشهٔ مخرج است وتابع به‌ازای آن ناپیوسته می‌باشد. وقتی که x با مقادیر بزرگتر از ۲ به سمت ۲ میل کند، تابع به سمت $+\infty$ میل می‌کند و اگر x با مقادیرکوچکتر از ۲ به‌سمت ۲میل‌کند، y به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند. به عبارت دیگر، به ازای $x=۲$ تابع برابر $\pm\infty$ می‌باشد وخط به‌معادلهٔ $x=۲$ مجانب منحنی است (چرا؟).

ب ـ مشتق تابع یعنی $y'=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}$ به ازای $x=۲$ نامعین و به ازای جمیع مقادیردیگر x منفی است. پس تابع در فواصلی‌که معین است نزولی می‌باشد.

ج ـ به ازای $x=\pm\infty$ داریم : $y=۱$. پس خط به معادلهٔ

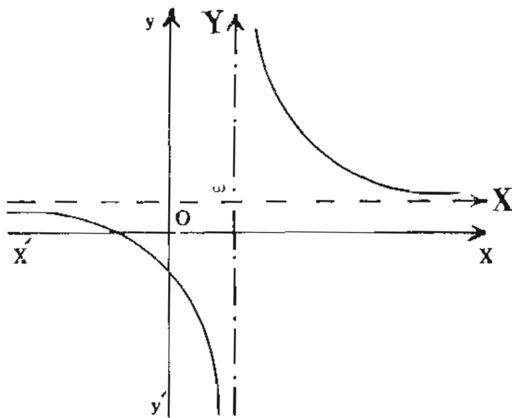
$y=۱$ نیز مجانب منحنی است .

د ـ به‌ازای $y=۰$ داریم : $x=-۱$.

جدول تغییرات تابع عبارت است از :

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
y'	−	−	−	−	−	−	‖	−	−
y	۱	↘	۰	↘	$-\frac{۱}{۲}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱

و منحنی نمایش آن چنین است (شکل ۲۲) :



شکل ۲۲

تبصره ـ دراینجا نیز نقطهٔ (۱ و۲) ω محل تلاقی دومجانب، مرکز تقارن منحنی است. زیرا اگر محورها را انتقال دهیم تا مبدأ بر نقطهٔ ω منطبق شود و مختصات جدید نقطه را X و Y بنامیم، داریم :

$x=X+۲$ و $y=Y+۱$

ومعادلهٔ منحنی نسبت به محورهای جدید عبارت است از :

$$Y+1=\frac{X+2+1}{X+2-2} \qquad \text{یا} \qquad Y=\frac{3}{X}$$

از روی این معادله پیداست که اگر X را به $-X$ تبدیل کنیم Y به $-Y$ تبدیل می‌شود . یعنی مبدأ جدید (نقطهٔ ω) مرکز تقارن منحنی است.

۵۷ـ بطور کلی در بارهٔ تابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ و منحنی نمایش تغییرات آن می‌توان گفت :

اول ـ تابع به ازای جمیع مقادیر x معین و پیوسته است مگر به‌ازای : $x=-\frac{b'}{a'}$

دوم ـ مشتق تابع یعنی $y'=\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$ همواره دارای یك علامت می‌باشد که همان علامت $ab'-ba'$ است ، پس :

اگر $ab'-ba'>0$ باشد ، تابع در فواصلی که پیوسته است صعودی می‌باشد .

و اگر $ab'-ba'<0$ باشد ، تابع در فواصلی که پیوسته است نزولی می‌باشد .

سوم ـ منحنی نمایش تغییرات این تابع دارای دو مجانب است، یکی موازی بامحور $y'y$ و به‌معادلهٔ $x=-\frac{b'}{a'}$ (زیرا به‌ازای $x=-\frac{b'}{a'}$ داریم : $y=\pm\infty$) ودیگری موازی بامحور $x'x$ و به‌معادلهٔ $y=\frac{a}{a'}$.

(زیرا به‌ازای $x=\pm\infty$ داریم : $y=\frac{a}{a'}$).

چهارم ـ نقطهٔ $\omega\left(-\frac{b'}{a'}, \frac{a}{a'}\right)$ محل تلاقی دومجانب مرکز تقارن

منحنی است .

تمرین و مسئله

منحنی نمایش تغییرات توابع زیر را رسم کنید :

۱ـ $y=\frac{x}{x-1}$ ۲ـ $y=\frac{x+1}{x}$

۳ـ $y=\frac{x+2}{x+1}$ ۴ـ $y=\frac{2x+3}{x-2}$

۵ـ $y=\frac{x+5}{2x-7}$ ۶ـ $y=\frac{2-x}{x+4}$

۷ـ $y=\frac{3+x}{3-x}$ ۸ـ $y=\frac{2x+1}{1+x}$

۹ـ تابع $y=\frac{ax+1}{x+b}$ که در آن a و b دو عدد ثابت و اختیاری هستند مفروض است :

a و b را طوری تعیین کنید که وقتی x به سمت صفر میل می‌کند ، y بینهایت شود و وقتی که x بینهایت می‌شود ، y به سمت ۲ میل کند.

۱۰ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+a}{x+b}$ محور $x'x$ را در نقطهٔ A و محور $y'y$ را در نقطهٔ B قطع می‌نماید ؛ a و b را طوری معین کنید که معادلهٔ خط AB بصورت $y=x-1$ باشد و به ازای این مقادیر a و b منحنی را رسم کنید .

۱۱ـ تابع $y=\frac{ax+1}{x+a}$ مفروض است؛ a را طوری معین کنید که مماس برمنحنی در نقطهٔ به طول واحد موازی خط $y=-x$ [illegible] باشد و به‌ازای این مقدار a منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

۱۲- تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ مفروض است؛ منحنی نمایش تغییرات آن‌را رسم نمایید ، سپس خط $y=mx$ را درنظر گرفته m را طوری تعیین نمایید که این خط منحنی را قطع‌کند یا با آن مماس شود .

۱۳- اولا منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-2}{1-x}$ را رسم‌کنید. ثانیاً در عدهٔ نقاط تقاطع خط (D) به معادلهٔ $y=x-m$ با منحنی (C) برحسب مقادیر مختلف m بحث‌کنید و به فرض اینکه M و M' نقاط تقاطع خط (D) با منحنی (C) باشند، مختصات نقطهٔ P وسط پاره خط MM' را بر حسب m حساب‌کنید .

۱۴- تابع $y=\frac{3-x}{x+5}$ مفروض است ؛ اولا منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم‌کنید . ثانیاً تعیین‌کنید چند مماس می‌توان براین منحنی رسم کرد که ضریب زاویه‌ای آن m باشد (بحث برحسب مقادیر مختلف m) .

۱۵- تابع $y=\frac{3x-1}{x+1}$ مفروض است ؛ ثابت‌کنیدکه از مبدأ مختصات می‌توان دو مماس براین منحنی رسم‌کرد. معادلات خطوط مماس و مختصات نقاط تماس و معادلهٔ خط واصل مابین نقاط تماس و طول اضلاع و تانژانت زوایای مثلث حاصل از مبدأ مختصات و نقاط تماس را حساب‌کنید.

۱۶- تابع $y=\frac{ax+b}{x-1}$ مفروض است ؛ اولا a و b راچنان معین کنیدکه منحنی نمایش تغییرات تابع از $A\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ بگذرد و مماس در نقطهٔ به‌طول ۳ بر منحنی بامحور Ox زاویهٔ ۱۳۵ درجه بسازد . ثانیاً به‌ازای ۱ = a و b = ۳ منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم‌کنید.

۱۷- دوتابع $y=\frac{ax+1}{x}$ و $y=\frac{x}{ax+1}$ مفروضند . اولا ثابت کنیدکه به ازای مقادیر مختلف a دو منحنی نمایش تغییرات این دو تابع عموماً یکدیگر را دردونقطهٔ M_1 و M_2 قطع می‌کنند ومختصات نقاط تقاطع را برحسب a حساب‌کنید . ثانیاً اگر x' و x'' طولهای نقاط تقاطع باشند، ثابت کنید $\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}$ همواره مقدار ثابتی است . ثالثاً دو منحنی نمایش این دوتابع را C_1 و C_2 می‌نامیم؛ تحقیق‌کنیدکه a را می‌توان قسمی اختیارکرد که مماس درنقطهٔ M_1 بر منحنی C_1 و مماس در نقطهٔ M_2 بر منحنی C_2 بر هم عمود باشند و ثابت‌کنید که در این صورت مماس در نقطهٔ M_2 بر منحنی C_1 نیز بر مماس در نقطهٔ M_1 برمنحنی C_2 عمود می‌باشد . رابعاً بازای $a=\sqrt{2}$ دو منحنی را نسبت به‌یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

۱۸- دو تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ و $y=\frac{m(x-1)}{x+1}$ مفروضند؛ اولا برحسب مقادیر مختلف m در وجود نقاط تقاطع دو منحنی بحث‌کنید . ثانیاً اگر A و B نقاط تقاطع دومنحنی باشند معادلهٔ خط AB را تشکیل داده ثابت کنید که این خط به ازای جمیع مقادیر m بر نقطهٔ ثابتی‌که مختصات آن راتعیین خواهیدکرد مرور می‌کند . ثالثاً m را چنان انتخاب‌کنیدکه مجموع‌طولهای نقاط A و B مساوی ۴ باشد. رابعاً به‌ازای ۳ = m منحنی نمایش دوتابع‌را رسم‌کنید .

۱۹- تابع $y=\frac{ax-11}{x+a-12}$ مفروض است؛ اولا مطلوب است تعیین حدود a برای آنکه تابع مفروض صعودی یا نزولی یا برابر مقدار ثابتی باشد . ثانیاً a را چنان انتخاب کنید که مماس برمنحنی در نقطه‌ای که طول آن ۲ می‌باشد باخط $24x+25y=0$ موازی‌باشد . ثالثاً به ازای ۵ = a منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم‌کنید . رابعاً ثابت‌کنیدکه دو خط به موازات خط $y=-x$ وجود دارد که با منحنی اخیر مماس می‌باشند ؛ معادلهٔ این دو خط را تعیین‌کرده مختصات نقاط تماس را تا دو رقم اعشار بدست آورید.

۲۰- تابع $y=\frac{ax-2}{x-2a}$ (۱) مفروض است ؛ اولا بر حسب مقادیر مختلف a در جهت تغییرات تابع مفروض بحث کنید و معلوم کنید بهازای چه مقادیر a تابع همواره برابر مقدار ثابتی است . ثانیاً نقطهٔ $M\begin{vmatrix}2a\\a\end{vmatrix}$ را در نظر میگیریم ، ثابت کنید که این نقطه مرکز تقارن منحنی تابع مفروض است . ثالثاً تابع $y=\frac{x(a+1)-2(a+1)}{x-2a}$ (۲) را در نظر میگیریم ثابت کنید که مشتق تابع (۲) با مشتق تابع (۱) برابر است وعلت این موضوع را بیان کنید. رابعاً a را طوری معین کنید که ضریب زاویهای مماس بر دو منحنی نمایش تغییرات توابع (۱) و (۲) درنقطهٔ $x=0$ برابر $-\frac{15}{32}$ باشد و به ازای $a=4$ منحنی دو تابع (۱) و (۲) را رسم کنید.

۲۱- تابع $y=\frac{x-3}{2x+1}$ مفروض است؛ اولا منحنی نمایش آن را رسم کنید. ثانیاً خط $y=-x+3$ این منحنی را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 قطع میکند . مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ M_1M_2 و مختصات وسط M_1M_2 و زاویهٔ مابین دو خط OM_1 و OM_2 (O مبدأ مختصات است) .

۲۲- تابع $y=\frac{ax+1}{bx-1}$ مفروض است ؛ a و b را چنان معین کنید که اگر x بینهایت شود ، y برابر ۳ گردد و اگر y بینهایت شود، x برابر با واحد شود. ثانیاً جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{3x+1}{x-1}$ را رسم کنید. ثالثاً خط $y=x+5$ منحنی تغییرات تابع را در دو نقطهٔ M و N قطع مینماید. مساحت مثلث OMN (O مبدأ مختصات) را حساب کنید .

۲۳- تابع $y=\frac{ax+1}{x+a}$ مفروض است. اولا a را طوری معین کنید

که منحنی نمایش تابع با خط $x=-2$ مجانب باشد. ثانیاً جدول ومنحنی تغییرات تابع $y=\frac{2x+1}{x+2}$ را رسم کنید . ثالثاً ثابت کنید که از نقطهٔ $M(-1, 3)$ میتوان دو مماس بر منحنی رسم کرد . معادلهٔ این دو مماس را بنویسید .

۲۴- تابع $y=\frac{2x-a}{ax-2}$ مفروض است ؛ اولا a راطوری تعیین کنید که اگر یکی از دو مقدار x یا y مساوی بینهایت شود ، دیگری برابر $\frac{2}{5}$ گردد . ثانیاً جدول و منحنی نمایش تابع $y=\frac{2x-5}{5x-2}$ را رسم کنید . ثالثاً ثابت کنید که میتوان دو مماس از مبدأ مختصات بر منحنی رسم کرد . معادلات این مماسها را بیابید . رابعاً خط $y=-x$ منحنی را در نقاط M و N قطع میکند .اگر P محل تلاقی دومجانب این منحنی با یکدیگر باشد ، مساحت مثلث MNP را حساب کنید .

۲۵- اولا در تابع $y=\frac{ax+b}{x+c}$ مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع دارای دو خط مجانب $x=3$ و $y=1$ باشد ومحور x را درنقطهٔ بهطول $x=2$ قطع کند . ثانیاً منحنی تغییرات تابع $y=\frac{x-2}{x-3}$ را رسم کنید . ثالثاً ثابت کنید که خط $y=mx$ منحنی را همیشه در دونقطهٔ A و B قطع میکند . رابعاً مختصات نقطهٔ P وسط قطعهـ خط AB را برحسب m حساب کنید.

۲۶- تابع $y=\frac{ax+b}{x-1}$ مفروض است ؛ اولا مقادیر a و b را

قسمی تعیین کنید که منحنی تابع از مبدأ مختصات گذشته ودرهمین نقطه بر خط $y=-x$ مماس باشد . ثانیاً منحنی (C) نمایش تابع $y=\frac{x}{x-۱}$ را رسم کنید . ثالثاً ازنقطهٔ $D\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right.$ خطی با ضریب زاویه‌ای m مرور نموده منحنی را در دو نقطه قطع کرده است؛ تحقیق کنید که ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲-(m-۳)x-۴=۰$ طولهای نقاط تقاطع می‌باشند ؛ به‌ازای چه مقادیر m این خط منحنی را قطع می‌کند یا با آن مماس می‌شود.

پایان